

Partikelträgheit im turbulenten Feld

Ingolf Aschenbrenner

Seminararbeit

1997

Institut für Meteorologie und Klimaforschung
Universität Karlsruhe/Forschungszentrum Karlsruhe

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Die Bewegungsgleichung von Tropfen	6
3	Die räumliche Verteilung von Tropfen	10
4	Die Relativbewegung von Tropfen	13
4.1	Strömung mit konstanter Scherung	13
4.2	Periodisch fluktuierende Strömung	17
5	Ergebnisse numerischer Simulationen	21
6	Stabilitätsanalyse der Tropfenbewegung	28
6.1	Die Tropfenbewegung als dynamisches System	29
6.2	Gescherte und periodisch fluktuierende Strömung	32
6.2.1	Scherungsfreie Strömung	33
6.2.2	Scherungsbehaftete Strömung	35
6.2.3	Tropfenschwingungen in Scherungsschichten	36
7	Zusammenfassung	39
8	Literaturverzeichnis	41

1 Einleitung

In den meisten bisherigen Turbulenzstudien zum Problem des Koagulationswachstums wird der Einfluß der Turbulenz auf die Relativbewegung für Abstände der Tropfen untereinander analysiert, die kleiner als einige Tropfenradien sind. Bei größeren Abständen wird die Relativgeschwindigkeit schlichtweg mit der Differenz der Fallgeschwindigkeiten gleichgesetzt. Deshalb wird auch vorausgesetzt, daß größere Tropfen grundsätzlich schneller fallen als kleinere. Zusammenstöße können nach dieser Vorstellung nur in vertikaler Richtung und nur aufgrund unterschiedlicher Fallgeschwindigkeiten erfolgen. Die stationäre Fallgeschwindigkeit wiederum hängt nur von der Tropfenmasse ab. Die Koaleszenzwirksamkeit wird als proportional zur Differenz der Fallgeschwindigkeiten und zur sogenannten Koagulationseffektivität vorausgesetzt. Dabei wird angenommen, daß die Tropfenträgeit gegenüber den Effekten im Schwerfeld der Erde vernachlässigbar gering ist. Die Horizontalgeschwindigkeit sämtlicher Tropfen wird vernachlässigt. Es treten also keine Relativbewegungen und damit auch keine Kollisionen in der Horizontalen auf [Pinsky und Khain (1996)].

Es soll nun kurz die gängige Vorstellung bezüglich des Kollisionsvorganges dargelegt werden. Der Zusammenstoß von Teilchen läßt sich allgemein wie folgt beschreiben: Wird ein Tropfen im Strömungsfeld der restlichen Tropfen mit der Anzahldichte n herausgegriffen, so gilt für die Anzahl der Stöße N dieses Tropfens mit anderen Tropfen pro Zeiteinheit

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{dV} \frac{dV}{dt} = n A_{eff} \frac{dx}{dt} = n A_{eff} v_{rel}$$

Dabei ist A_{eff} der effektive Querschnitt zweier sich aufeinander zu bewegnender Tropfen parallel zur Richtung ihrer Verbindungsachse, und v_{rel} stellt die Relativgeschwindigkeit dar, mit der sich die Tropfen aufeinander zu bewegen (Abbildung 1).

In der derzeit gängigen Koaleszenztheorie (siehe allgemeine Darstellungen zur Wolkenphysik¹) bleibt die Anzahldichteverteilung n der Tropfen im Raum schlichtweg unberücksichtigt oder wird bestenfalls – in Ermangelung besseren Wissens – als durchgängig homogen angenommen. Der effektive Querschnitt A_{eff} beim Stoß zweier Tropfen wird üblicherweise rein geometrisch aus der Summe der Radien r_i und r_j der beiden beteiligten Tropfen gemäß $A_{eff} = \pi (r_i + r_j)^2$ gebildet. Dieser Vorstellung liegt die Annahme zugrunde, daß Tropfen, die sich aufeinander zu bewegen, mit Sicherheit kollidieren werden, falls sich ihre als geradlinig vorausgesetzten Trajektorien im weiteren Verlauf überlagern. Der Abbildung 1 liegt der Grenzfall zugrunde, daß sich die beiden Tropfen im Vorbeifliegen gerade noch streifen. Selbstverständlich bleiben bei diesem vereinfachten Modell jegliche Wechselwirkungen der Tropfen bei der Annäherung aneinander in der

¹z. B. Pruppacher und Klett (1978) oder Rogers und Yau (1989)

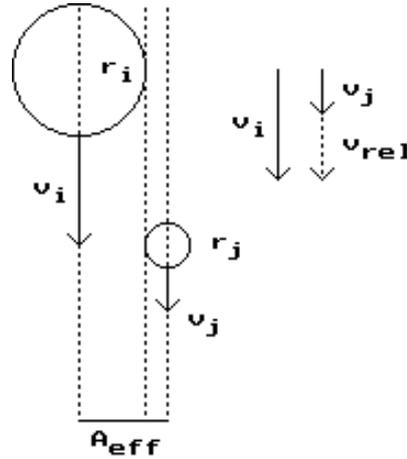


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Tropfenkoaleszenz (Erläuterungen im Text)

Grenzschicht Wasser-Luft sowie bei erfolgter Berührung an der Tropfenoberfläche außen vor. Um die theoretische Beschreibung der Koaleszenz zu erleichtern, geht man davon aus, daß in dem nach einer Anpassungszeit erreichten stationären Zustand die unbeschleunigte Fallgeschwindigkeit der Tropfen als Gleichgewicht zwischen Schwerkraft und ihr entgegenwirkender Reibungskraft den etwa vorhandenen – horizontalen wie vertikalen – Translationskomponenten in der Größenordnung überlegen ist. Insbesondere bleiben turbulente Effekte in der Strömung unberücksichtigt. Die Relativgeschwindigkeit v_{rel} zweier Tropfen wird dann durch die Differenz ihrer unbeschleunigten Fallgeschwindigkeiten W_S ersetzt. Die Tatsache, daß die Fallgeschwindigkeit W_S mit der Größe r der Tropfen monoton zunimmt, hat zur Konsequenz, daß in diesem Modell nur Tropfen unterschiedlicher Größe koagulieren können, indem der kleinere der beiden Tropfen vom größeren Tropfen während der Fallbewegung im Schwerfeld der Erde eingeholt wird. Die Relativgeschwindigkeit $v_{rel} = |W_{S,i} - W_{S,j}|$ ist umso größer, je ausgeprägter der Größenunterschied der beiden Tropfen ist. Die Annahme geradliniger Trajektorien hat den Ausschluß von Trägheitskräften aus der üblicherweise angewendeten Koaleszenztheorie zur Folge.

Bei der Koaleszenz von Wassertropfen interessiert weniger, in welcher Häufigkeit die Stöße auftreten, als vielmehr der zeitliche Massenzuwachs der Tropfen durch die Kollisionen mit anderen Tropfen. Der Massenfluß, also die Massenänderung ΔM des größeren Tropfens mit dem Radius r_i beim Einfangen des kleineren Tropfens mit dem Radius r_j , kommt in der Koaleszenzrate K_{ij} zum Ausdruck, die im laminaren Fall wie folgt definiert ist:

$$K_{ij} = \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dV} \frac{dV}{dt} = \varrho_j A_{eff} E_{ij} v_{rel} = \varrho_j \pi (r_i + r_j)^2 E_{ij} |W_{S,i} - W_{S,j}|$$

Dabei stellt ρ_j die gesamte Massendichte aller kleineren Tropfen im betrachteten Luftvolumen V dar, die im allgemeinen wesentlich geringer als die Dichte der einzelnen Wassertropfen – in erster Näherung diejenige von Wasser $\rho_W = 1 \text{ g/cm}^3$ – sein wird! Desweiteren wurde ein zusätzlicher, dimensionsloser Faktor E_{ij} eingefügt, die sogenannte Kollisionseffizienz. Dieser Faktor beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei Annäherung der beiden Tropfen bis auf einen bestimmten Abstand auch wirklich ein Zusammenstoß unter dauerhafter Vereinigung der beiden Tropfen zu einem größeren Tropfen stattfindet. Mit diesem Faktor kann auch der Deformation Rechnung getragen werden, der vor allem das Strömungsfeld der kleineren Tropfen im turbulenten Fluid innerhalb der Wirbelzellen ausgesetzt ist. Durch in dichter Abfolge auftretende kleinräumige Geschwindigkeitsschwankungen in der turbulenten Strömung werden die Tropfen hin- und hergerissen und überdecken während ihres Fluges durch das Feld der anderen Tropfen einen größeren Volumenbereich als im laminaren Fall. Ein derartiges Anwachsen des Überlappungsbereichs der Tropfentrajektorien sollte ein häufigeres Auftreten von Zusammenstößen der Tropfen miteinander nach sich ziehen. Bildlich gesprochen „fegt“ ein großer Tropfen während einer Zeiteinheit einen bestimmten Volumenbereich der kleineren Tröpfchen leer. In turbulenter Strömung erfaßt er dabei mehr Tröpfchen, weil bedingt durch Geschwindigkeitsfluktuationen sich eine größere Anzahl dieser Tröpfchen eine bestimmte Zeit lang innerhalb dieses Volumenbereiches aufhalten.

Der theoretischen Beschreibung des Koagulationsvorganges steht die Beobachtung des Anwachsens von Wolkentropfen in der Atmosphäre und der dadurch möglichen Bildung von Regentropfen gegenüber. Die Theorie sollte diese in der Natur ablaufenden Vorgänge einigermaßen schlüssig erklären können. Beobachtet wird unter anderem folgendes:

Ein ursprünglich schmales Tropfengrößenspektrum verbreitert sich in kurzer Zeit und kann ohne Beteiligung der Eisphase zur Bildung von „warmem Regen“ führen. Die Kondensation alleine ist nicht in der Lage, Tropfen zu erzeugen, die groß genug sind, um als Regen aus der Wolke zu fallen. Das Diffusionswachstum ist ein zu langsamer Prozeß, denn es wird ungefähr 1 h zur Bildung vergleichsweise großer Tropfen mit $30 \mu\text{m}$ benötigt, die fähig sind, durch Koagulationsprozesse rasch anzuwachsen. In Wolken durchgeführte Messungen zeigen aber, daß die Regenbildung und damit notwendigerweise auch die Verbreiterung des Tropfengrößenspektrums in warmen Wolken schon in der sehr viel kürzeren Zeit von 15–20 min möglich ist [Pinsky und Khain (1996)].

Es wird in den Wolken eine deutliche Korrelation zwischen den Gebieten ausgeprägter Turbulenz und denjenigen hoher Tropfenkonzentration beobachtet. In diesen turbulenten Gebieten findet die beobachtete rasche Verbreiterung des Tropfenspektrums statt. Die Struktur der Windfluktuationen in den Wolken ist extrem inhomogen: Wolken-

teile mit stärkerem Wind existieren neben Bereichen relativ geringer Luftbewegung. Am Rand von Wolken ist die Turbulenz besonders ausgeprägt. Turbulenz in der Wolke ist offenbar ursächlich für die rasche Verbreiterung des Tropfengrößenspektrums und begünstigt gleichzeitig das Auftreten von Anomalien hinsichtlich der Regenrate [Pinsky und Khain (1995a)].

In Cumuli, aber auch in stratiformen Wolken, wird eine hochgradig inhomogene Verteilung der Konzentration der Wolkenpartikel beobachtet. Die räumliche Skala dieser Inhomogenitäten reicht von einigen 10 cm bis zu 100 m. Im großräumigen Bereich sind die Inhomogenitäten der Tropfenkonzentration mit den Inhomogenitäten der Niederschlagsrate korreliert. Weil die Koagulationswirksamkeit direkt proportional zur Konzentration der beteiligten Teilchen ist, besteht darum in Gebieten erhöhter Konzentration auch eine höhere Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Tropfen über eine mittlere Größe hinweg anwächst, so daß es zu einem raschen Koagulationswachstum mit Bildung sehr großer Tropfen kommen kann. Dadurch wird eine wesentliche Beschleunigung gegenüber dem Verhalten bei Homogenität erreicht. Als weitere Möglichkeit zur Erklärung der raschen Verbreiterung des Tropfengrößenspektrums ist gleichwohl auch das bloße Vorhandensein sehr großer Kondensationskerne, sogenannter Rieskerne, denkbar [Pinsky und Khain (1996)].

Hinsichtlich der Gültigkeit der in der gängigen Koaleszenztheorie angewendeten Vereinfachungen, wenn eine turbulente Strömung vorliegt, stellen sich unter anderem folgende Fragen:

- Kann die Turbulenz in Verbindung mit der Partikelträgheit die beobachtete Inhomogenisierung der räumlichen Verteilung der Tropfen verursachen?
- Bewirkt die Trägheit der Tropfen merkliche horizontale Geschwindigkeitsdifferenzen der Tropfen untereinander, so daß die Koaleszenztheorie entsprechend modifiziert werden muß?

Speziell diesen beiden Fragen soll im folgenden nachgegangen werden. Dazu wird zunächst die Bewegung individueller Wassertropfen in der sie umgebenden Luft betrachtet. Nachdem in Abschnitt 2 die Bewegungsgleichung der Tropfens aufgestellt ist, werden in Abschnitt 3 anschließend die Auswirkungen der Turbulenz auf die räumliche Verteilung der Tropfen untersucht. Es zeigt sich, daß die Tropfen bedingt durch ihre Trägheit einer Bewegung von Gebieten mit größerer Vorticity hin zu Bereichen mit geringerer Wirbelstärke unterliegen. Auf die Turbulenz in der Wolkenluft übertragen, bedeutet dies die Herausbildung von Inhomogenitäten der Tropfenkonzentration innerhalb der Wolken. In der Wolke bewegen sich die Tropfen zwischen den Turbulenzwirbeln in relativ schmalen

Kanälen, sogenannten „*isolierten Pfaden*“, auf denen die Tropfenkonzentration stark erhöht ist und dementsprechend die Voraussetzungen für vermehrte Zusammenstöße der Tropfen und damit für Koaleszenz günstig sind. In Abschnitt 4 folgt eine analytische Untersuchung des Verhaltens von Tropfen in einer scherungsbehafteten Luftströmung unter verschiedenen einschränkenden Bedingungen. Dabei wird gezeigt, daß die Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Tropfen nicht – wie bei dem gängigen Koaleszenzmodell üblich – nur aus der Differenz der unbeschleunigten Fallgeschwindigkeiten beider Tropfen besteht, sondern vielmehr bei vertikaler Luftscherung die unterschiedliche Horizontalgeschwindigkeit der Tropfen, welche diese aufgrund ihrer Trägheit und der verschiedenen Herkunft mitbringen, unter Umständen einen Beitrag von derselben Größenordnung liefern kann. Anschließend folgt – ebenfalls noch in Abschnitt 4 – ein Vergleich der Bewegung von trägheitslosen und trägheitsbehafteten Tropfen in einer rein wirbelförmigen Strömung – stellvertretend für die in der realen atmosphärischen Turbulenz vorkommende Strömungskonfiguration – mit entsprechenden Ergebnissen hinsichtlich horizontaler Geschwindigkeitsdifferenzen. Von verschiedener Seite durchgeführte numerische Simulationen in Abschnitt 5 deuten auf die zumindest tendenzielle Übertragbarkeit dieser Folgerungen auf die reale turbulente Situation in der Wolkenluft hin.

Im weiteren Verlauf wird in Abschnitt 6 zu einer mehr feldbezogeneren Betrachtungsweise der Tropfengeschwindigkeit übergegangen. Die Tropfenbewegung wird nun als dynamisches System betrachtet, für welches eine Stabilitätsanalyse durchgeführt wird, um die Existenz von stabilen Punkten im Strömungsfeld mit analytischen Mitteln untersuchen zu können. Mithilfe dieser Methode der Stabilitätsanalyse kann schließlich der im Hinblick auf die reale atmosphärische Turbulenz realistischere Fall einer fluktuierenden Luftströmung ebenfalls rechnerisch angegangen werden. Als Ergebnis zeigt sich, daß die Tropfen bei ihrem Fall durch mehr oder weniger regelmäßig angeordnete kreisförmige Luftwirbel zu Schwingungen in der Horizontalen angeregt werden, wodurch sich das von den Tropfen effektiv durchlaufene Volumen wesentlich erhöht, was gleichermaßen mit einer Zunahme der Koaleszenz in Verbindung gebracht wird.

2 Die Bewegungsgleichung von Tropfen

In diesem Abschnitt wird – als Grundlage für alle weiteren Betrachtungen – die Bewegungsgleichung eines Partikels in einem Fluid zunächst in allgemeiner Form aufgestellt und anschließend dem einfachen System eines Wassertropfens in der ihn umgebenden Luft entsprechend vereinfacht. Hierbei wird der Begriff der unbeschleunigten Fallgeschwindigkeit eingeführt. Abweichungen vom stationären Fall sind dann turbulenzbedingt.

Die Bewegungsgleichung von Tropfen der Masse m in einem viskosen Medium

lautet

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_W \quad (1)$$

Sie stellt eine Gleichgewichtsbeziehung zwischen der Beschleunigung des Tropfens (Trägheitskraft) und der Summe der am Tropfen angreifenden Kräfte, nämlich der Schwerkraft $m \vec{g}$, der Auftriebskraft \vec{F}_A und der Reibungskraft \vec{F}_W , dar. Die Tropfengeschwindigkeit $\vec{V} \doteq (U, W)^\top$ soll sich nur aus einer horizontalen und einer vertikalen Komponente zusammensetzen. Für die Auftriebskraft \vec{F}_A gilt

$$\vec{F}_A = -m \vec{g} \frac{\varrho_L}{\varrho_W} \quad (2)$$

Dabei ist ϱ_L die Dichte der Luft und ϱ_W diejenige des Wassertropfens. Nach dem Ansatz von Stokes gilt für die Reibungskraft

$$\vec{F}_W = 6 \pi \eta_L r [\vec{V}_L(\vec{X}, t) - \vec{V}(t)] \quad (3)$$

Dabei bezeichnet r den Tropfenradius, $\eta_L = \varrho_L \nu$ die dynamische Viskosität der Luft – $\nu \approx 0,15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ist die dazugehörige kinematische Viskosität – und $\vec{V}_L \doteq (U_L, W_L)^\top$ die Geschwindigkeit der Luft in der Umgebung. $X \equiv X(t)$ stellt die Position des Tropfens auf seiner Trajektorie zu einer bestimmten Zeit t dar. Für die Bewegungsgleichung des Tropfens mit dem Radius r und der Masse m gilt dann

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = 6 \pi \eta_L r [\vec{V}_L(\vec{X}, t) - \vec{V}(t)] + m \vec{g} \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_W}\right) \quad (4)$$

Wird Stationarität $\partial/\partial t = 0$ und ruhende Luft $\vec{V}_L = 0$ in der Umgebung des Tropfens vorausgesetzt, so verschwinden die lokalzeitliche Ableitung und die Advektion der Tropfengeschwindigkeit, und es gilt:

$$0 = -6 \pi \eta_L r \vec{W}_S + m \vec{g} \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_W}\right) \quad (5)$$

Hier wird mit \vec{W}_S die konstante Tropfengeschwindigkeit relativ zu einer ruhenden Umgebung definiert. Es ergibt sich dann die unbeschleunigte Fallgeschwindigkeit im Falle von Stokes'scher Reibung zu

$$\vec{W}_S = \frac{m \vec{g} \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_W}\right)}{6 \pi \eta_L r} = \text{const.} \quad (6)$$

Mit Einführung einer Zeitkonstanten τ , der Anpassungszeit der Vertikalbewegung des Tropfens bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustands,

$$\tau := \frac{m}{6 \pi \eta_L r} = \frac{2}{9} \frac{\varrho_W}{\eta_L} r^2 \quad (7)$$

und unter Verwendung der Tropfenmasse $m = 4 \pi r^3 \varrho_W / 3$ läßt sich die unbeschleunigte Fallgeschwindigkeit \vec{W}_S auch in der Form

$$\vec{W}_S = \tau \vec{g} \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_W} \right) \approx \tau \vec{g} \quad (8)$$

darstellen. Wegen $\tau \sim r^2$ ist auch $W_S = |W_S| \sim r^2$, also gleichermaßen eine monoton wachsende Funktion des Tropfenradius r . Im weiteren Verlauf soll die Relaxationszeit τ den wesentlichen Indikator für die Trägheit eines Tropfens darstellen. Kleines τ bedeutet schwach ausgeprägte Trägheit, und umgekehrt. Abhängig von den Strömungseigenschaften gelten folgende Anhaltswerte:

$$r \quad 1 \mu\text{m} \quad 10 \mu\text{m} \quad 100 \mu\text{m}$$

$$\tau \quad 15 \mu\text{s} \quad 1,5 \text{ ms} \quad 150 \text{ ms}$$

$$W_S \quad 150 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}} \quad 15 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \quad 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Bei diesen Werten wurde eine mittlere Luftdichte von $\varrho_L \approx 1 \text{ kg/m}^3$ angenommen. Bei größeren Dichten können die Werte auch um bis zu einem Drittel niedriger ausfallen.

Es kann auch ein nichtlinearer Reibungsansatz – zum Beispiel nach Newton – zugelassen werden:

$$\vec{F}_W = -\frac{1}{2} C_W \pi r^2 \varrho_L \left| \vec{V}_L(\vec{X}, t) - \vec{V}(t) \right| \left[\vec{V}_L(\vec{X}, t) - \vec{V}(t) \right] \quad (9)$$

Dabei ist C_W ein Widerstandsbeiwert, über dessen Parametrisierung sich hydrodynamische Effekte in das doch recht einfache System einbinden lassen. Die Bewegungsgleichung lautet damit bei Stationarität und ruhender Luft

$$0 = -\frac{1}{2} C_W \pi r^2 \varrho_L \left| \vec{W}_N \right| \vec{W}_N + m \vec{g} \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_W} \right) \quad (10)$$

\vec{W}_N ist in diesem Fall die unbeschleunigte Fallgeschwindigkeit bei Newton'scher Reibung. Mit der Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{2 r \varrho_L \left| \vec{W}_N \right|}{\eta_L} \quad (11)$$

läßt sich \vec{W}_N als Funktion von \vec{W}_S und Re darstellen:

$$\vec{W}_N = \frac{4 m \vec{g} \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_W} \right)}{\pi \eta_L r C_W Re} = \frac{24}{C_W Re} \vec{W}_S = f(Re) \vec{W}_S \quad (12)$$

Bei bekannter Reynolds-Zahl Re lassen sich die beiden Fallgeschwindigkeiten \vec{W}_S und \vec{W}_N also leicht ineinander umrechnen.

Im folgenden wird durchgängig Stokes'sche Reibung verwendet. Dies ist dann statthaft, wenn $Re \ll 1$ erfüllt wird. Die Tropfen müssen dazu hinreichend klein sein. Um die Turbulenz nicht zu beeinflussen, sollen die Tropfen auch kleiner als die Kolmogorov'sche Mikroskala $l_0 = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ sein, der Abmessung der kleinsten turbulenten Wirbel. Die kinematische Viskosität der Luft liegt im Bereich von $\nu = 0,15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, und für die Energiedissipationsrate ε im atmosphärisch relevanten Bereich können folgende experimentelle Ergebnisse als Durchschnittswerte angenommen werden [Khain und Pinsky (1995)]:

$$0,001 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3} \qquad 0,01 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3} \qquad 0,1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$$

stratiforme Wolken kleine Cumuli zentrale Teile von Cb

Die Mikroskala l_0 hat dann Werte aus dem Bereich von 0,5 mm bis 1,5 mm. Damit sowohl die Auftriebskraft als auch der Einfluß der Fluidmasse vernachlässigt werden kann, muß für die Partikel- und Fluidichten $\rho_W \gg \rho_L$ gelten. Dies ist für Wassertropfen in einer Luftströmung natürlich erfüllt. Andererseits sollen die Tropfen aber groß genug sein, daß die Brown'sche Bewegung keine Rolle spielt. Damit die Tropfen sich unabhängig voneinander bewegen und durch ihre Eigenbewegung das Turbulenzfeld nicht beeinflussen, muß entweder deren Massendichte $\rho_W = m_W/V$ oder die Anzahldichte $n_W = N_W/V$ im betrachteten Luftvolumen V entsprechend gering sein. In einer Luftströmung unter Atmosphärenbedingungen gelten diese Einschränkungen für den Größenbereich $2 \mu\text{m} < r < 30 \mu\text{m}$ der Tropfenradien [Maxey (1987)].

Die Bewegungsgleichung erhält mit der Einführung der Anpassungszeit τ und der Fallgeschwindigkeit W_S schließlich die Form

$$\tau \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}_L(\vec{X}, t) - \vec{V}(t) + \vec{W}_S \quad (13)$$

beziehungsweise in Komponenten

$$\tau \frac{dU}{dt} + U = U_L \quad (14)$$

$$\tau \frac{dW}{dt} + W = W_L + W_S \quad (15)$$

Herrscht eine von Null verschiedene Horizontalgeschwindigkeitsdifferenz $U - U_L$ relativ zur umgebenden Luft, dann ist bedingt durch die Reibung auch die Vertikalgeschwindigkeit W dementsprechend geringer als die Fallgeschwindigkeit W_S bei ruhender Luft; die Abweichung ist allerdings gering, so daß man näherungsweise von $W \approx W_S$ ausgehen kann, was im folgenden – falls nicht ausdrücklich anders vermerkt – durchgehend vorausgesetzt wird. Eine analoge Argumentation läßt sich auch unter Zuhilfenahme der Reynolds-Zerlegung durchführen. Die Vertikalbewegung W setzt sich nämlich aus der Fallgeschwindigkeit in ruhender Luft

W_S und den Fluktuationen W' durch Änderungen der horizontalen Komponente der Geschwindigkeit gemäß $W = W_S + W'$ zusammen. Realistisch gesehen ist $W' \ll W_S$. Deshalb kann getrost $W \approx W_S$ gesetzt werden [Khain und Pinsky (1995)].

3 Die räumliche Verteilung von Tropfen

Eine Voraussetzung für häufigeres Auftreten von Kollisionen zweier Tropfen und damit eventuell einhergehenden Koaleszenzvorgängen ist die Erhöhung der Konzentration der Stoßpartner. In diesem Abschnitt stellt sich heraus, daß das Geschwindigkeitsfeld der Tropfen auf bestimmte Weise von der umgebenden Strömung der Luft abhängt. Große und damit träge Tropfen meiden nämlich Gebiete mit starker Vorticity, was zu einer Ansammlung der Tropfen in denjenigen Gebieten führt, in denen die Strömung stark deformiert ist. Hinsichtlich der Verteilung der Tropfen im Raum entstehen also Inhomogenitäten.

Um die Turbulenzeffekte beschreiben zu können, führt man die Abweichung der Tropfengeschwindigkeit von der Luftgeschwindigkeit und der Fallgeschwindigkeit $\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_L - \vec{W}_S$ ein. Für trägheitslose Partikel gilt $\vec{V}' = 0$. Von Null abweichende Werte $\vec{V}' \neq 0$ sind also trägheitsbedingt.

Nach einigen Vereinfachungen (Weglassen der lokalzeitlichen Ableitung bei vorausgesetzter Stationarität und des horizontalen Advektionsterms bei horizontaler Homogenität) verbleibt die Bewegungsgleichung (13) in der Form

$$\tau W_S \frac{\partial}{\partial z} (\vec{V}_L + \vec{V}') + \tau (\vec{V}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_L + \vec{V}' = 0 \quad (16)$$

Die vertikale Scherung $\partial \vec{V}_L / \partial z$ und die Trägheitsbeschleunigung $(\vec{V}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_L$ verursachen turbulente Abweichungen von der Tropfengeschwindigkeit. Für kleine Tropfen mit einem Radius $r < 30 \mu\text{m}$ sind sowohl $\partial \vec{V}_L / \partial z$ als auch $\partial \vec{V}' / \partial z$ klein und können vernachlässigt werden [Pinsky und Khain (1996)]. Übrig bleibt somit nur

$$\vec{V}' \approx -\tau (\vec{V}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_L \quad (17)$$

Die turbulenzinduzierten Geschwindigkeitsabweichungen werden demnach allein durch die Trägheitsbeschleunigung verursacht. Ein Beispiel soll diese Aussage verdeutlichen:

Sei $\vec{V}_L = \vec{\Omega} \times \vec{R}$ – hervorgerufen durch eine starre Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ bei einem senkrechten Abstand zur Drehachse \vec{R} –, so erhält man für den oben als „Trägheitsbeschleunigung“ bezeichneten Term

$$-\tau (\vec{V}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_L = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\vec{\Omega}^2 \vec{R} \quad (18)$$

Das Ergebnis ist die Zentrifugalbeschleunigung, also tatsächlich eine Trägheitsbeschleunigung.

Das zugrundeliegende Strömungsfeld der Luft V_L wird von nun an gemäß $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_L = 0$ als divergenzfrei vorausgesetzt. Bildet man jetzt die Divergenz des Strömungsfelds V der Tropfen, so folgt unter Anwendung der Einsteinschen Summationskonvention in der Komponentendarstellung

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}_L + \vec{V}') = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}' \approx -\tau \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_L = -\tau \frac{\partial V_{L,j}}{\partial x_i} \frac{\partial V_{L,i}}{\partial x_j} = \\ &= -\frac{1}{4} \tau \left[\left(\frac{\partial V_{L,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{L,j}}{\partial x_i} \right)^2 - \left(\frac{\partial V_{L,i}}{\partial x_j} - \frac{\partial V_{L,j}}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (19)\end{aligned}$$

$$Divergenz(\vec{V}) = -\frac{1}{4} \tau \left[Deformation^2(\vec{V}_L) - Vorticity^2(\vec{V}_L) \right] \quad (20)$$

Bei kleinen Werten der Relaxationszeit τ ist der Term, der die Trägheitskräfte beschreibt, klein, so daß entsprechende Partikel auf Änderungen im zugrundeliegenden Strömungsfeld rasch ansprechen. Zunächst wird der Fall einer trägheitslosen Partikel mit $\tau = 0$ betrachtet. Dann beschreibt die Bewegungsgleichung das Kräftegleichgewicht zwischen der Schwerkraft und der ihr entgegenwirkenden Reibungskraft. Die Divergenzfreiheit des Strömungsfeldes V_L überträgt sich dann auf das „Strömungsfeld“ V der trägheitsfreien Partikel. Für trägheitslose Teilchen verläuft die Trajektorie deshalb exakt entlang den Stromlinien des Strömungsfeldes der Luft. Der Einfluß der Partikelträgheit auf die turbulente Strömung ist dadurch feststellbar, daß für endliche Werte von τ das Partikelströmungsfeld divergent wird. Dessen Divergenz kann dann von Null verschiedene Werte annehmen. Divergenz tritt in Gebieten starker Vorticity oder schwacher Deformation des Strömungsfeldes der Luft auf, umgekehrt herrscht in Gebieten mit überwiegender Deformation Konvergenz. Die Partikel tendieren also dahin, sich in Gebieten starker Deformation oder schwacher Vorticity anzusammeln.

Speziell ist eine spiralförmige Bewegung der Partikeltrajektorien bei ursprünglich kreisförmigen Stromlinien zu erwarten. In der reinen Deformationsströmung nahe eines Stagnationspunktes kehrt sich die Stromlinienkrümmung um, und die Trägheitsverharrung läßt die Partikel zum Stagnationspunkt hin driften [Maxey (1987)] (Abbildung 2).

Die Partikelanzahldichte, also die Zahl der Partikel pro Volumeneinheit, werde mit $n(\vec{x}, t)$ bezeichnet. Bei Annahme von schwacher Trägheit sowie unter Ausschluß von Teilchenstoßwechselwirkungen ist das System damit vornehmlich durch die „Partikelerhaltung“

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{V}) = 0 \quad (21)$$

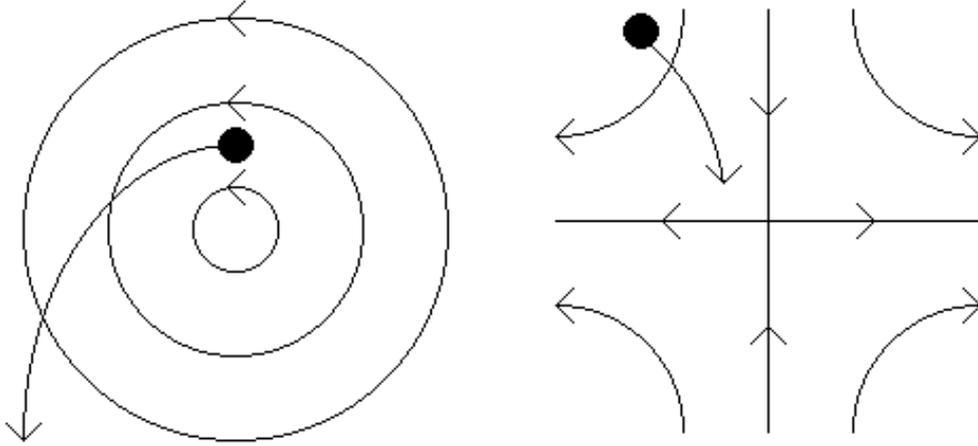


Abbildung 2: Bewegung träger Partikel in einem Turbulenzwirbel (links), Verhalten träger Partikel bei einem Stagnationspunkt (rechts) [Squires und Eaton (1990)]

festgelegt. Die molekulare Diffusion bleibt hier unberücksichtigt. Mithilfe der Euler-Entwicklung läßt sich der Erhaltungssatz auch als

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} = -n \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad (22)$$

schreiben. Für die zeitliche Entwicklung der Partikelanzahldichte folgt damit

$$n(\vec{x}, t) = n(\vec{x}, 0) e^{-\int_0^t \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}, t') dt'} \quad (23)$$

wobei die Partikeltrajektorie $\vec{X}(t)$ die Bewegungsgleichung $d\vec{X}/dt = \vec{V}(\vec{x}, t)$ zur Zeit t unter der Randbedingung $\vec{X}(0) = \vec{x}$ lösen soll.

In der turbulenten Strömung sollte die vorausgesetzte schwache Trägheit nicht zu wesentlichen singulären Anhäufungen der Partikel führen, so daß $n(\vec{x}, t)$ nur wenig von der anfänglich homogenen Partikelanzahldichte n_0 abweicht. Deshalb kann die Exponentialfunktion für kleine x gemäß $e^x \approx 1 + x$ approximiert werden [Maxey (1987)]:

$$n(\vec{x}, t) \approx n_0 \left(1 - \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}, t') dt' \right) \quad (24)$$

Da ja eine Akkumulierung der Partikel erfolgt, sind selbst noch für kleines τ – also bei relativ geringer Trägheit – Abweichungen von den eben erhaltenen Ergebnissen möglich. Deren Ursache ist die Korrelation der in bestimmten Regionen auftretenden akkumulationsbedingten Verstärkung der Partikelkonzentration mit den Fluktuationen im dortigen lokalen Fluidfeld. Die Bündelung der Trajektorien ist eine typische Eigenschaft von inhomogenen Strömungsfeldern. In einer

homogenen, aber un stetigen Strömung können aber durchaus ähnliche Effekte auftreten. Die Partikelträgheit beschränkt dann einfach die Reaktionsfähigkeit der Partikel auf höherfrequente Fluktuationen im Strömungsfeld und ist damit die Ursache für das Auftreten einer Phasenverschiebung [Maxey (1987)].

4 Die Relativbewegung von Tropfen

Aus den vorherigen Abschnitten ist bereits bekannt, daß die Trägheit der Tropfen zu Umverteilungen im Raum und damit zu Inhomogenitäten führt. Die Verdichtung der Partikelkonzentration in bestimmten Bereichen der Strömung ist eine – allerdings noch nicht hinreichende – Vorbedingung für ein vermehrtes Auftreten von Stößen der Tropfen untereinander. Damit im Mittel mehr Kollisionsprozesse in einer bestimmten Zeit stattfinden können, müssen sich die Tropfen in erster Linie schneller aufeinander zu bewegen. Dies ist gleichbedeutend mit einer größeren Relativgeschwindigkeit der Tropfenpaare. Während zunächst eine zahlenmäßige Abschätzung des Turbulenzeinflusses in einer Luftströmung mit konstanter Scherung untersucht wird, wird dieselbe Betrachtung anschließend – stellvertretend für die in realen turbulenten Strömungen vorkommenden, zufällig angeordneten Turbulenzwirbel – für eine mit periodisch aneinandergereihten Wirbelzellen durchgesetzte Luftströmung durchgeführt.

4.1 Strömung mit konstanter Scherung

Die horizontale Komponente der Bewegungsgleichung (14) lautet in allgemeiner Form

$$\tau \frac{du}{dt} + U = U_L \quad (25)$$

Die Vertikalkomponente wird weiterhin durch $W \approx W_S$ angenähert. Die totale Ableitung d/dt wird über die Euler-Zerlegung gemäß $d/dt = \partial/\partial t + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}$ aufgespalten. Zunächst wird eine stetige horizontale Strömung U_L mit einer konstanten vertikalen Scherung $\alpha = dU_L/dz = \text{const.}$ angenommen. Diese Art Strömung ist auch unter dem Namen Couette-Strömung bekannt (Abbildung 3).

Bei vorausgesetzter Stationarität wird in der Bewegungsgleichung die zeitliche Variation sämtlicher Größen vernachlässigt. Darüberhinaus soll horizontale Homogenität herrschen, so daß einzig eine Abhängigkeit von der Vertikalkoordinate z besteht. Übrig bleibt eine direkte Beziehung zwischen der Horizontal- und der Vertikalgeschwindigkeit

$$-\tau W_S \frac{\partial U}{\partial z} = U_L - U \quad (26)$$

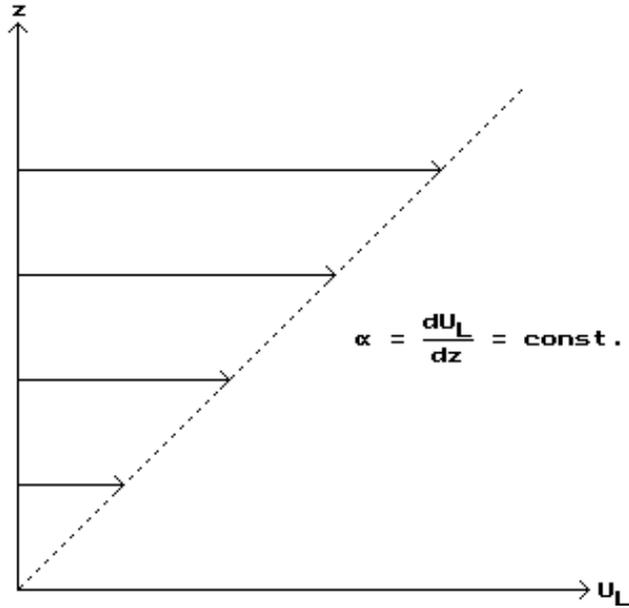


Abbildung 3: Couette-Strömung (Erläuterungen im Text)

Das Minuszeichen steht, weil zwar $W_S = |W_S| \geq 0$ ist, die Fallgeschwindigkeit aber in Richtung der negativen z -Achse zeigt. In erster Näherung gilt $\partial U/\partial z \approx \partial U_L/\partial z = \alpha$, also

$$-\tau \alpha W_S = U_L - U \quad (27)$$

Diese Gleichung sagt aus, daß bei schnellerer horizontaler Relativbewegung sich wegen der größeren Reibung ein geringerer Vertikalwind einstellt. Für die horizontale Bewegung der Tropfen folgt – unter Verwendung von (8) für W_S –

$$U = U_L + \tau \alpha W_S \approx U_L + \tau^2 \alpha g \quad (28)$$

Die Tropfen bewegen sich also etwas schneller als die sie umgebende Strömung. Als stationäre horizontale Relativgeschwindigkeit zur umgebenden Luft erhält man dann

$$U_{sr} = U - U_L = \tau^2 \alpha g \quad (29)$$

Die Relaxationszeit bis zum Erreichen dieser stationären Geschwindigkeit ist von ähnlicher Größenordnung wie bei $U_L = 0$. Die Relaxationszeit bei gescherter Strömung entspricht der Dauer des Einflusses, bis die Tropfengeschwindigkeit nur noch von Strömungsparametern und den Eigenschaftsgrößen des Tropfens abhängt. U_{sr} wächst linear mit der Scherung α des mittleren Windes. Zum Beispiel gilt bei der relativ starken Scherung $\alpha = 1 \text{ s}^{-1}$:

r	$1 \mu\text{m}$	$10 \mu\text{m}$	$100 \mu\text{m}$
W_S	$150 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$	$15 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
U_{sr}	$2,25 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$22,5 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$	$225 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$

Mit zunehmender Trägheit τ gewinnt dieser Effekt an Bedeutung. Diese großen Werte treten aber nur in stark turbulenten Strömungen auf, wo die Tropfen ihre stationäre Relativgeschwindigkeit nicht erreichen können.

Die Komponenten der Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Tropfen mit den Radien r_i und r_j seien

$$\Delta U_{ij} = U_i - U_j \quad (30)$$

$$\Delta W_{ij} = W_i - W_j \approx \Delta W_{S,ij} \quad (31)$$

Für das Verhältnis der horizontalen und der vertikalen Komponente der Geschwindigkeitsdifferenzen gilt – unter Verwendung von (8) für W_S –

$$\left| \frac{\Delta U_{ij}}{\Delta W_{S,ij}} \right| = \alpha \left| \frac{\tau_i W_{S,i} - \tau_j W_{S,j}}{W_{S,i} - W_{S,j}} \right| = \alpha \left| \frac{\tau_i^2 - \tau_j^2}{\tau_i - \tau_j} \right| = \alpha (\tau_i + \tau_j) \quad (32)$$

Bei gleichgroßen Tropfen verschwinden zwar sowohl ΔU_{ij} als auch $\Delta W_{S,ij}$, allerdings existiert für deren Verhältnis ein Grenzwert. Die Untersuchung der Grenzfälle liefert

$$\left| \frac{\Delta U_{ij}}{\Delta W_{S,ij}} \right| = \alpha (\tau_i + \tau_j) \rightarrow 2\alpha\tau \text{ für } r_i \approx r_j \quad (33)$$

$$\left| \frac{\Delta U_{ij}}{\Delta W_{S,ij}} \right| = \alpha (\tau_i + \tau_j) \rightarrow \alpha\tau_i \text{ für } r_i \gg r_j \quad (34)$$

Der entscheidende Beitrag zur horizontalen Relativgeschwindigkeit wird demnach von den großen Tropfenpaaren oder von den Tropfenpaaren mit wenigstens einem großen Tropfen geliefert.

Für ein Zahlenbeispiel scheint es sinnvoll zu sein, die möglichst größten, im Tropfengrößenspektrum noch in relevanter Menge vorkommenden Tropfen zu untersuchen. Bei Tropfen mit Radien um $r = 100 \mu\text{m}$ liegt man damit wohl kaum falsch, weil sich in diesem Größenbereich der Übergang vom Wolkentropfen zum mit wachsender Wahrscheinlichkeit ausfallenden Regentropfen vollzieht. Die Anpassungszeit τ von Tropfen dieser Größe beträgt – in Abhängigkeit von der kinematischen Viskosität und der Dichte der Luft – 100–150 ms. Gibt man zusätzlich den für eine vertikale Scherung ziemlich stattlichen Wert von $\alpha = 1 \text{ m/s}$ vor, so erhält man für das Verhältnis aus zusätzlicher horizontaler, scherungsbedingter

Relativgeschwindigkeit und der Differenz der Fallgeschwindigkeiten zweier gleichgroßer Tropfen mit $100 \mu\text{m}$

$$\left| \frac{\Delta U_{ij}}{\Delta W_{S,ij}} \right| = 20\text{--}30\% \quad (35)$$

Obschon dieser Wert vielleicht unerwartet hoch ausfällt, darf man nicht vergessen, daß für dieses Beispiel ein sehr extremer Fall gewählt wurde, nämlich daß zwei Tropfen mit denselben Radien $r = 100 \mu\text{m}$ miteinander koagulieren sollen. Dies wird in der Realität wohl eher selten vorkommen, finden doch die meisten Koaleszenzvorgänge bei Paaren mit deutlichen Größenunterschieden der beteiligten Tropfen statt. Zusätzliche Effekte in gescherten Luftströmungen können also insgesamt gesehen kaum als Ursache dafür dienen, daß die bisher gängige Koaleszenztheorie Unzulänglichkeiten hinsichtlich der Intensität des Tropfenwachstums aufweist.

Für die obige Ableitung müssen folgende Einschränkungen in Betracht gezogen werden [Khain und Pinsky (1995)]:

- Die hydrodynamische Interaktion der Tropfen bleibt unberücksichtigt. Diese tritt auf, wenn sich beide Tropfen auf weniger als einige Tropfenradien annähern, wenn die Tropfen also in die jeweilige Grenzschicht des anderen Tropfens eintreten. Der Einfluß der Tropfeninteraktion im Abstand weniger Tropfenradien kann dadurch berücksichtigt werden, daß die Kollisionseffizienz entsprechend parametrisiert wird.
- Die Geschwindigkeitsdifferenz wird derart angenommen, als trete im Augenblick des Zusammenstoßes nicht wirklich eine Kollision auf, durch die eine Geschwindigkeitsänderung verursacht würde; das Vorgehen entspricht also der klassischen Theorie, in welcher die Koaleszenzrate als proportional zur Differenz der Fallgeschwindigkeiten in ruhender Luft vorausgesetzt wird.

Es wird demnach eine Annäherung im großen Maßstab betrachtet. Der Abstand zwischen den kollidierenden Tropfen muß allerdings gering genug sein, damit derselbe Wert $\frac{dU_L}{dz}$ für beide Tropfen verwendet werden kann; es ist also eine Beschränkung auf den Bereich weniger Tropfenradien vonnöten.

Insgesamt gesehen wird demnach die Turbulenz im kleineren Maßstab, also im viskosen Bereich, nicht berücksichtigt. Dies wird vor allem bei den kleineren Tropfen, die von den Abmessungen her vergleichbar mit den Turbulenzwirbeln oder kleiner sind, zu Modifikationen führen. Für größere Tropfen sollten die Turbulenzeffekte hingegen eine untergeordnete Rolle spielen.

4.2 Periodisch fluktuierende Strömung

Stellvertretend für eine reale, von Turbulenzzellen durchsetzte Luftströmung wird ein divergenzfreies, zelluläres Strömungsfeld in Form einer periodischen Aneinanderreihung von Turbulenzwirbeln in zwei Dimensionen betrachtet (Abbildung 4), das sich durch eine Stromfunktion ψ_L über die Beziehung

$$\psi_L = \frac{\hat{U}_L}{k} \sin(kx) \sin(kz) \quad (36)$$

ausdrücken läßt. Dabei stellt $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl der periodischen Wirbel dar. Für die Luftströmung gilt dann $\vec{V}_L = \vec{j} \times \vec{\nabla} \psi_L$ mit $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, und damit ergibt sich für die Komponenten der Strömung

$$U_L = \frac{\partial \psi_L}{\partial z} = \hat{U}_L \sin(kx) \cos(kz) \quad (37)$$

$$W_L = -\frac{\partial \psi_L}{\partial x} = -\hat{U}_L \cos(kx) \sin(kz) \quad (38)$$

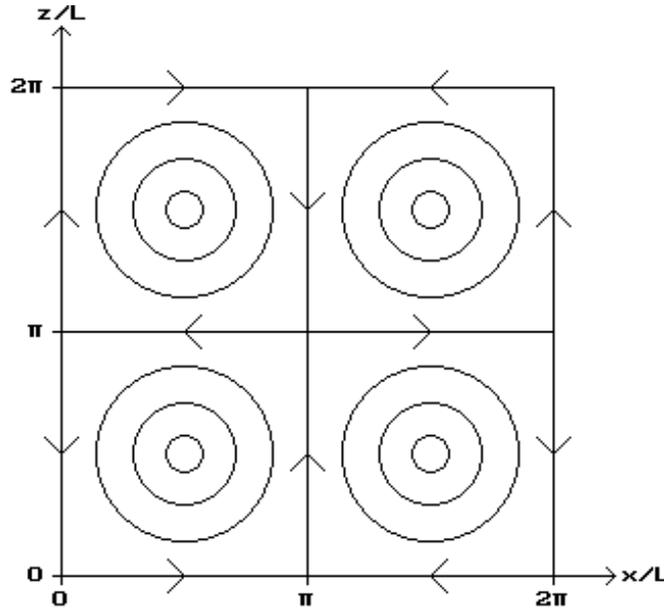


Abbildung 4: Zelluläres Strömungsfeld [Wang et al. (1992)]

Die horizontale Komponente der Bewegungsgleichung (14) lautet in ihrer ursprünglichen Form

$$\tau \frac{du}{dt} = U_L - U \quad (39)$$

Für die Vertikalkomponente gelte hingegen weiter $W \approx W_S$. Wird nun der Ansatz für die horizontale Komponenten U_L der Strömungsgeschwindigkeit der umgebenden Luft \vec{V}_L in die Bewegungsgleichung eingesetzt, so erhält man

$$\tau \frac{dU}{dt} = U_L - U = \hat{U}_L \sin(kx) \cos(kz) - U \quad (40)$$

Die Vertikalkomponente W_L kann gegenüber der Fallgeschwindigkeit W_S vernachlässigt werden. Die Bewegung in vertikaler Richtung vereinfacht sich dann zu

$$z = -W t \approx -W_S t \quad (41)$$

Damit läßt sich eine Differentialgleichung für die horizontale Komponente U der Tropfengeschwindigkeit \vec{V} bilden, indem in der Bewegungsgleichung die Zeitkoordinate t durch die zugehörige Fallstrecke z ausgedrückt wird:

$$-\tau W_S \frac{du}{dz} = \hat{U}_L \sin(kx) \cos(kz) - U \quad (42)$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung bietet sich ein Schwingungsansatz der Form

$$U = U(x, z) = A(x) \cos(kz) + B(x) \sin(kz) \quad (43)$$

an. Dies läßt sich auch als

$$U = U(x, z) = \hat{U} \cos(kz - \varphi) \quad (44)$$

darstellen. In die Differentialgleichung eingesetzt, ergibt sich – unter Verwendung von (8) für W_S – bei Koeffizientenvergleich der Terme mit Sinus und Kosinus für die Amplitude

$$\hat{U} = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\hat{U}_L \sin(kx)}{\sqrt{1 + g^2 \tau^4 k^2}} \quad (45)$$

und für die Phasenverschiebung

$$\varphi = \arctan \frac{B}{A} = \arctan(g^2 \tau^2 k) \quad (46)$$

Dieses Ergebnis besagt, daß die Tropfen bedingt durch eine periodische Abfolge von Wirbeln in der sie umgebenden Strömung der Luft ebenfalls zu Schwingungen angeregt werden. Tropfen mit geringer Trägheit $\tau \approx 0$ folgen annähernd der Strömung der Luft, was dadurch zum Ausdruck kommt, daß die Amplitude \hat{U}_L ihrer Oszillation mit derjenigen der Strömung übereinstimmt und zwischen beiden Schwingungen keinerlei Phasenverschiebung φ besteht. Bei sehr großer Trägheit $\tau \rightarrow \infty$ hingegen verschwindet die Amplitude \hat{U}_L der Tropfenoszillationen, und

die Tropfen sind nicht mehr in der Lage, der Strömung zu folgen, da die Fluktuationen für diese Tropfen zu rasch vor sich gehen, und folgen demnach – nur durch die Schwerkraft angetrieben – einer geradlinigen Bewegung mit ihrer unbeschleunigten Fallgeschwindigkeit W_S . Für die Phasenverschiebung gilt $\varphi \rightarrow \pi/2$ für $\tau \rightarrow \infty$. Tropfen mit endlicher Trägheit irgendwo im Bereich zwischen diesen beiden Extremen führen gedämpfte Schwingungen durch – mit gegenüber der Luftströmung verminderten Amplituden bei gleichzeitiger Phasenverschiebung (Abbildung 5).

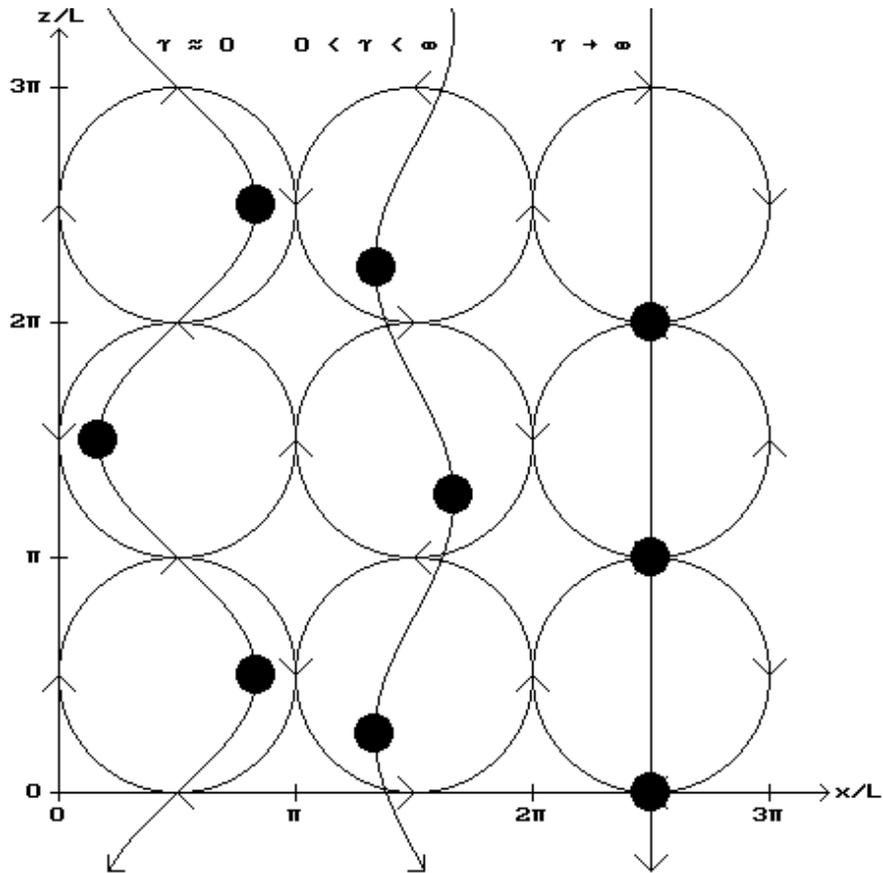


Abbildung 5: Tropfenschwingungen bei periodischem Strömungsfeld (Erläuterungen im Text)

Ob die hier betrachteten periodischen Fluktuationen bei der Tropfenkoaleszenz eine Rolle spielen, hängt nun davon ab, wie groß die horizontalen Geschwindigkeitsabweichungen zweier Tropfen im Vergleich zur Differenz ihrer Fallgeschwindigkeiten werden können. Dazu betrachtet man am besten das Verhältnis aus den horizontalen und vertikalen Geschwindigkeitsdifferenzen der beiden Tropfen mit den Radien r_i und r_j

$$\frac{\Delta U}{\Delta W} \approx \frac{\Delta U}{\Delta W_S} = \frac{\sqrt{(A_i - A_j)^2 + (B_i - B_j)^2}}{|W_{S,i} - W_{S,j}|} = \frac{(\tau_i + \tau_j) \hat{U}_L k \sin(kx)}{\sqrt{1 + g^2 \tau_i^4 k^2} \sqrt{1 + g^2 \tau_j^4 k^2}} \quad (47)$$

Als Grenzfall ergibt sich zum einen für Tropfen derselben Größe

$$\frac{\Delta U}{\Delta W_S} \rightarrow \frac{2\tau}{1 + g^2 \tau^4 k^2} \hat{U}_L k \sin(kx) \quad \text{für } r_i \approx r_j \quad (48)$$

Sowohl für $\tau \rightarrow 0$ als auch für $\tau \rightarrow \infty$ verschwindet dieses Verhältnis; irgendwo dazwischen muß diese Größe deshalb ein Extremum aufweisen. Es zeigt sich, daß dieses Maximum für einen weiten Bereich der Wellenzahlen k bzw. der Wellenlängen λ in guter Näherung bei Tropfengrößen von ziemlich genau $100 \mu\text{m}$ liegt. Zur Abschätzung des Effektes, den die zusätzliche horizontalen Relativgeschwindigkeit der Tropfen untereinander hinsichtlich der Koaleszenz verursachen, werden deshalb im folgenden Zahlenbeispiel zwei Tropfen mit jeweils $r = 100 \mu\text{m}$ betrachtet, deren Anpassungszeit τ ungefähr $100\text{--}150 \text{ ms}$ beträgt. Die Amplitude der periodischen Fluktuationen wird mit $\hat{U}_L = 1 \text{ m/s}$ angenommen. In Abhängigkeit von der Wellenlänge λ der Strömungswirbel ergeben sich dann folgende Anhaltswerte:

$$\lambda \quad 1 \text{ m} \quad 10 \text{ m} \quad 100 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta W} \quad 75 \% \quad 15 \% \quad 1,5 \%$$

Der Wert von 15% bei Wellenlängen um 10 m kann eventuell gerade noch vernachlässigt werden; sind allerdings geringere Wellenlängen und damit kleinere Luftwirbel in der Strömung vorhanden, so muß man den Effekt der Vergrößerung der Relativgeschwindigkeit zweier Tropfen in geeigneter Weise berücksichtigen, falls im Tropfengrößenspektrum wirklich genügend Tropfen mit Radien um $100 \mu\text{m}$ existieren, die zur Koaleszenz fähig sind. Dieses Ergebnis darf freilich nicht überbewertet werden, weil das Beispiel gerade so gewählt wurde, daß ein größtmöglicher Effekt eintritt. Bei der Relativbewegung zweier gleichgroßer Tropfen mit Radien deutlich unter $100 \mu\text{m}$ fallen die Zahlenwerte wesentlich unbedeutender aus und brauchen in der Regel nicht berücksichtigt zu werden. Hinzu kommt, daß die Wellenlänge der größeren, bedeutenderen Wirbel in den Wolken eher im Bereich von 10 m bis 100 m liegt, wo der betrachtete Effekt weniger ausgeprägt ist.

Für Tropfen, deren Größe sehr stark differiert, erhält man hingegen – unter Verwendung von (8) für W_S –

$$\frac{\Delta U}{\Delta W_S} \rightarrow \frac{1}{g \tau_i} \hat{U}_L \sin(kx) \quad \text{für } r_i \gg r_j \quad (49)$$

Erwartungsgemäß hängt das betrachtete Verhältnis in diesem Fall stärker vom größeren und damit trägeren Tropfen des Paares ab, so daß der Effekt der zusätzlichen Geschwindigkeitsdifferenz in der Horizontalen bei verschiedenen großen Tropfen eher ohne Belang.

Ob die vorliegenden Resultate im Hinblick auf die reale Atmosphäre von Relevanz sind, ist schwer zu sagen. Die turbulenten Wirbel werden hier stark schematisiert als zweidimensionale, periodisch aneinandergereihte Zellen dargestellt, die eine wirkliche, inhomogene bzw. anisotrope turbulente Strömung mit ihren charakteristischen Eigenschaften selbstredend nicht vollständig wiedergeben kann. Man könnte erwarten, daß durch Hinzunahme der dritten Dimension eine größere Variabilität der Relativbewegung ermöglicht würde, wodurch der hier betrachtete Effekt ebenfalls profitieren könnte.

5 Ergebnisse numerischer Simulationen

Das in den vorigen Abschnitten gefundene Ergebnis, daß die Trägheit der Tropfen zu einer Inhomogenisierung ihrer räumlichen Verteilung führt, sollte nun eigentlich mittels Experimenten verifiziert werden. Weil Messungen in realen Wolken aber aufwendig und in der Regel nicht reproduzierbar sind, begnügt man sich mit der Simulation von idealisierten Tropfen-Luft-Gemischen mithilfe eines Rechners. Nachfolgend werden hierzu die Ergebnisse einiger Veröffentlichungen in zeitlicher Abfolge vorgestellt. Auf eine Beschreibung der verwendeten Modelle wird hier zugunsten der Übersichtlichkeit verzichtet.

Die Arbeiten von Maxey und Corrsin (1986) sowie Maxey (1987) gehören zu den frühesten, die sich mit der Problematik der Partikelträgheit im Beisein von Turbulenz oder entsprechend simulierter Luftwirbel befassen. Im speziellen wird das unterschiedliche Verhalten der Teilchen in bestimmten Bereichen der Strömung, die damit verbundene Entstehung sogenannter „isolierter Pfade“ und die Auswirkungen dieser Effekte auf den zeitlichen Ablauf von Sedimentierungsvorgängen untersucht:

Falls τ klein und die Antwortzeit der Partikel entsprechend gering ist, gleicht sich das Mittel der Vertikalgeschwindigkeit der Fallgeschwindigkeit an, $\langle W \rangle \approx -W_S$, da die Partikel der Strömung vollständig folgen können und die turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen sich gegenseitig wegheben. Ist demgegenüber τ groß, so hinkt die Antwort trägheitsbedingt ihrer Ursache hinterher, was gleichzeitig mit einer verminderten Intensität einhergeht, so daß die veränderliche Strömung einen geringeren Einfluß auf die trägen Partikel hat.

Es besteht die Möglichkeit, daß Teilchen in geschlossenen Gebieten festgehalten werden. Dieser Fall kann aber nur dann eintreten, wenn

in Teilen dieser Gebiete die Aufwärtsbeschleunigung die entgegengesetzte Fallbeschleunigung überwiegt. Aus Stetigkeitsgründen folgt dann die Existenz von Gleichgewichtspunkten oder -linien, auf denen $W = -W_S$ exakt gilt und die damit beschleunigungsfrei sind. Die Möglichkeit eines Teilcheneinschlusses hängt von der Fallgeschwindigkeit W_S ab. Bei $W_S \rightarrow \infty$ treten keinerlei Einschlüsse auf, wohingegen bei $W_S = 0$ sämtliche Partikel daran gehindert werden, aus der Strömung auszufallen.

Wird nun Trägheit in der Form eines endlichen Wertes von τ zugelassen, so verschwinden die geschlossenen Räume. Dies bedeutet, daß bei trägen Partikeln wegen der nunmehr einsetzenden Zentrifugalkraft keine geschlossenen Räume mehr bestehen können. Die Teilchen bewegen sich in spiralförmigen Bahnen nach außen und durchqueren dabei möglicherweise andere geschlossene Gebiete trägheitsloser Teilchen mit $\tau = 0$. Bei abnehmender Anpassungszeit τ dauert es wegen der geringeren Trägheit trotz gleichbleibender Divergenz des Strömungsfeldes immer länger, bis das Teilchen den inneren Bereich der Zelle verläßt und ein stationäres Gleichgewicht entstehen kann. In Gebieten am Rand der Turbulenzzellen herrscht eine bevorzugte Strömung nach unten, so daß dort die seitlich nach außen driftenden Partikel in tiefere Regionen weggesaugt werden. Eine Reduzierung der Partikelträgheit verzögert den Prozeß nur; letztendlich fällt jede Partikel nach unten durch. Die Gleichgewichtspunkte existieren allerdings weiterhin. Teilchen, die genau an diesen Punkten in Ruhe sind, verweilen auch dort. Dabei handelt es sich freilich um kein stabiles Gleichgewicht, denn bereits eine infinitesimal geringe Verschiebung aus dieser Lage genügt zur Zerstörung des Gleichgewichts.

Das zelluläre Strömungsfeld scheint die Absetzung der Partikel im Durchschnitt zu beschleunigen. Dies ist auch noch bei sehr kleinem τ beobachtbar. Für große Fallgeschwindigkeiten W_S erfolgt hingegen eine leichte Verminderung der Absetzgeschwindigkeit. Bei trägheitslosen Partikeln ist im Mittel keine Veränderung der Absetzgeschwindigkeit zu erkennen. Große Trägheit verursacht, daß die Partikel raschen Geschwindigkeitsänderungen nicht mehr folgen können, also einen Tiefpaßfilter der Strömung darstellen. Allerdings kann es passieren, daß ein Teilchen an irgendeinem beliebigen Ort zur Ruhe kommt. Dort ist dann, solange die Partikelbewegung gering ist und damit auch keine Ursache für die Existenz von Trägheitskräften besteht, der Einfluß der Umgebung auf die Partikel besonders groß. Hinsichtlich der Teilchenbahnen kann dies eine sprunghafte Richtungsänderung zur Folge haben. Die Trajektorien großer Partikel setzen sich demnach aus geradlinigen Segmenten mit teilweise abrupten Richtungsänderungen

zusammen.

Wird die Bewegung einzelner Partikel verfolgt und dabei eventuell auftretende Partikelanhäufungen untersucht, so stellt sich heraus, daß ohne Trägheit keine solchen Anhäufungen erkennbar sind, und zwar weder im Falle von Einschließungen bei sehr kleinem W_S , noch beim Ausfallen der Partikel bei sehr großem W_S . Wenn keine Trägheit vorhanden ist, bleibt die ursprünglich homogene Verteilung der Partikel auch in Zukunft homogen. Bei einsetzender Trägheit verlassen die Partikel die Einschlußbereiche spiralförmig nach außen, so daß im Inneren dieser Einschlußbereiche fast keine Partikel mehr anzutreffen sind. Die Ansammlung der Trajektorien erfolgt entlang wohldefinierter Wege, sogenannter „*isolierter Pfade*“, die auch im weiteren Verlauf bestehen bleiben. Selbstverständlich bewegen sich die Teilchen auf diesen Bahnen trotzdem weiter. Sind die isolierten Pfade zwar stationär, aber nicht geschlossen, so rücken eben ständig neue Partikel nach. Diese isolierten Pfade sind identisch mit den für $t \rightarrow \infty$ angestrebten asymptotischen Partikeltrajektorien. Ist die Trägheit nur schwach und wird die Gravitation zunächst außer acht gelassen, so verlassen die Teilchen die Zelle, und das Äußere der Zelle stellt in diesem Fall den isolierten Pfad der Partikel dar. Verschiedene Trajektorien gleichen sich so asymptotisch einander an. Werden während der Aufwärtsbewegung bei großem W_S Einschlußgebiete durchquert, so können eventuell mitgeführte trägheitslose Teilchen darin eingeschlossen werden, wohingegen die schwereren Teilchen einfach unbeeinflusst weiterfliegen.

Vorwiegend mit den Auswirkungen der Partikelträgheit auf die räumliche Verteilung der Partikel in einer von Wirbeln durchsetzten Strömung und einer damit verbundenen *Inhomogenisierung* ihrer Anzahldichte beschäftigen sich die Veröffentlichungen von Squires und Eaton (1990, 1991):

Eine Ermittlung der Partikelanzahldichte ergibt Spitzenwerte, die den Mittelwert der Anzahldichte um das 30-fache überschreiten können. Stellt man Auftragungen der Anzahldichte solchen der Enstrophie, die proportional zum Quadrat der Vorticity ist, gegenüber, so zeigt sich, daß eine hohe Partikeldichte mit geringer Vorticity verbunden ist und daß umgekehrt an Orten mit starker Vorticity nur wenige Partikel zu finden sind.

Sehr kleine Partikel, deren Relaxationszeit τ vergleichbar oder kleiner als die externe Zeitskala τ_{ext} der Strömung ist, zeigen eine geringere Tendenz, sich in bestimmten Regionen zu akkumulieren. Weil sehr große Partikel mit entsprechend großer Relaxationszeit, für die $\tau/\tau_{ext} \gg 1$ gilt, nur wenig von der Turbulenz beeinflusst werden, wird

auch bei diesen großen Partikeln keine Häufung in bestimmten Gebieten niedriger Vorticity beobachtet. Es muß also ein optimales Verhältnis der Partikelzeitkonstante und der Fluidzeitskala τ/τ_{ext} existieren, das mit einer besonders ausgeprägten Partikelanhäufung verbunden ist.

Es zeigt sich, daß für bestimmte Verhältnisse τ/τ_{ext} der Partikelzeitkonstanten und der Fluidzeitskala die Partikel in turbulenten Zellen eingeschlossen werden können. In Konvergenz- und in Strömungszonen erweist sich die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Partikeln und dem Fluid als größer als in den konvektiven und in den Rotationsgebieten; träge Partikel, die in diese Regionen kommen, können ihre Geschwindigkeit nicht schnell genug den veränderten Umgebungsbedingungen anpassen. Als Konsequenz daraus verdichten sich die Trajektorien verschiedener Partikel in Richtung geringerer Vorticity und größerer Deformation. In diesen Akkumulationsgebieten wird zum Teil das 25-fache der mittleren Partikeldichte beobachtet.

Die Turbulenz an sich führt also nicht unbedingt – wie eigentlich zu erwarten – zu einer Homogenisierung, sondern kann durchaus auch zu einer Diskretisierung der Partikelkonzentration führen. Das Auftreten dieser Effekte zeigt aber eine starke Abhängigkeit vom relativen Verhältnis der Zeitskalen τ/τ_{ext} .

In den Arbeiten von Wang et al. (1992) sowie Wang und Maxey (1993) wird vor allem die Dispersion träger Partikel in einer turbulenten Umgebung untersucht:

Die Trägheitseffekte verursachen eine Akkumulation von Partikeln in der Peripherie von Vortexstrukturen als Folge der Interaktion schwerer Partikel mit der kleinskaligen Strömungsdynamik im Dissipationsbereich. Die Partikel tendieren dahin, sich entlang der abwärts gerichteten Seiten dieser lokalen Strukturen zu bewegen (Abbildung 6). Dabei kommt neben dem Einfluß des lokalen Windfelds und der Partikelträgheit noch hinzu, daß die Partikel gewöhnlich von oben kommen. Die stärkste Akkumulation tritt dann auf, wenn die Partikelantwortzeit mit der Zeitskala der kleinsten turbulenten Wirbel vergleichbar ist. Diese Skalierung deutet also darauf hin, daß die kleinskalige Strömungsdynamik bei bestimmten Aspekten der Partikelbewegung eine bedeutendere Rolle spielt als bisher angenommen. Gewöhnlich wird nämlich davon ausgegangen, daß die größerskalige, energiereiche Fluidbewegung den Transport und damit verbunden die großräumige Anordnung der Partikel dominiert.

Nebenbei wird auch ein starker Einfluß auf die Absetzgeschwindigkeit

der Partikel im Fluid und auf die Effizienz von Mischungsvorgängen beobachtet.

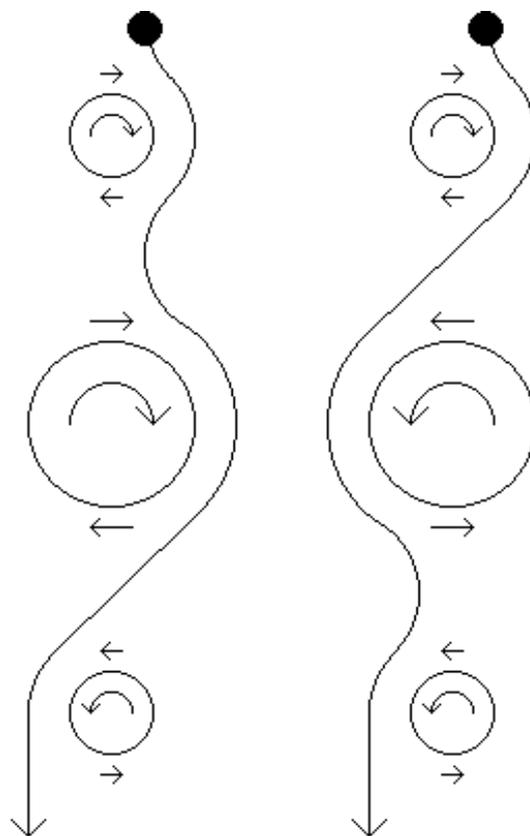


Abbildung 6: Partikeltrajektorien in zellulärer Strömung [Wang und Maxey (1993)]

Die bis dato neuesten Veröffentlichungen stammen von Khain und Pinsky (1995) sowie Pinsky und Khain (1995a, 1995b, 1996, 1997) und beinhalten neben vielen Abbildungen von – jeweils mit unterschiedlichen Parametern durchgeführten – Simulationen auch begleitende analytische Untersuchungen, die weitestgehend das Gerüst des theoretischen Teils dieser Seminararbeit bilden. Im Gegensatz zu den vorher zitierten Arbeiten, die allgemeiner – von einem ingenieurwissenschaftlichen Standpunkt aus – abgefaßt sind und das Verhalten von festen oder flüssigen Partikeln in einem Fluid als Trägermedium zugrundelegen, beziehen sich Pinsky und Khain ausdrücklich auf wolkenphysikalische Vorgänge. Ihre numerischen Strömungsmodelle zur Bewegung von Wassertropfen in Wolkenluft lieferten im einzelnen folgende Resultate:

Kleine Unterschiede in der Tropfengröße können zu erheblichen Divergenzen der Bahnen der beiden Tropfen in der turbulenten Strömung

führen. Auch geringe Abweichungen des Ursprungsortes können völlig verschiedene Trajektorien ergeben. Der horizontale Abstand zweier Tropfen kann nach einiger Zeit sogar größer sein als der Abstand der beiden Tropfen in vertikaler Richtung.

Befinden sich zum Beginn der Simulation Tropfen mit $100\ \mu\text{m}$ Radius in gleichmäßigen horizontalen Abständen in demselben Höhengniveau, so entstehen *isolierte Pfade* im Abstand von einigen 10 m, auf denen sich die Tropfen während ihres Falls ansammeln. Die größten Turbulenzzellen liefern den überwiegenden Beitrag zur Anhäufung der Partikeltrajektorien. Es existieren bestimmte Gebiete in der Strömung, die von den Tropfen gemieden und nicht durchflogen werden. Auf diese Weise entstehen Inhomogenitäten im Hinblick auf die Tropfenkonzentration. Werden mehrere dieser $100\ \mu\text{m}$ großen Tropfen an verschiedenen Stellen eines Wirbels ausgesetzt, so bewegen sie sich in ebenen Spiralen und fliegen in einem gemeinsamen schmalen Pfad aus dem Wirbel heraus. Tropfen, die sich zu Beginn außerhalb des Wirbels befinden, betreten diesen auch im weiteren Verlauf nicht und zeigen demzufolge auch keine spiralförmigen Trajektorien. Wird dasselbe mit $10\ \mu\text{m}$ großen Tropfen durchgeführt, so ist auch in diesem Fall ein Überwiegen des Beitrags der größten turbulenten Wirbel zu erkennen. Im turbulenten Diffusionsprozeß können sich kleinere Tropfen ziemlich lange in demselben Wirbel aufhalten. Die isolierten Pfade der verdichteten Tropfenbahnen beginnen direkt an diesen Wirbeln. Die Variation der Tropfenkonzentration längs der Bahn bewegt sich im Bereich von einigen m bis zu einigen 10 m. Quer zur Bahn liegen Unterschiede in der Konzentration bereits in Abständen von wenigen cm bis zu einigen 10 cm vor. Längs der Pfade bestehen demnach schwächere Gradienten der Tropfenkonzentration als quer dazu. Folglich handelt es sich bei den Gebieten erhöhter Konzentration um in die Länge gezogene, schmale Gebilde. Die Länge der Tropfenbahnen wächst also gegenüber dem turbulenzfreien Fall an, was mit einer erheblichen Vergrößerung der Kollisionsrate einhergeht.

Falls sich mehrere Tropfen gemeinsam in derselben turbulenten Zelle auf beinahe denselben geschlossenen Bahnen bewegen, die mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchlaufen werden, so können sich ihre Trajektorien dabei ohne weiteres kreuzen, denn es kommt nur dann zu einer Kollision, wenn die Bahnen zweier Teilchen sich zu demselben Zeitpunkt schneiden.

Der Einfluß der Turbulenz auf die stochastische Koaleszenzrate erweist sich als signifikant unter der Annahme, daß zu Beginn der Simulation bereits $30\ \mu\text{m}$ große Tropfen vorhanden sind. Schon nach 10 min ist eine deutliche Verbreiterung des Tropfenspektrums sowie

eine Zunahme der Konzentration großer Tropfen zu beobachten. Bei den kleinen Tropfen treten zwar nur geringe Differenzen in deren turbulenten Geschwindigkeiten auf, allerdings ist gleichzeitig auch die Differenz ihrer Fallgeschwindigkeiten klein, so daß sich die Turbulenz auch bei kleineren Tropfen bemerkbar macht. Die Differenz der Fallgeschwindigkeiten geht nämlich für Tropfenradien $r \rightarrow 0$ schneller zurück als die trägheitsbedingte Geschwindigkeitsdifferenz.

Die Gebiete, in denen Konzentrationsanhäufungen oder -defizite herrschen, unterliegen mit fortlaufender Zeit einem chaotischen Wandel, gleiches gilt auch für die Verteilung der Inhomogenitäten. Wird eine großräumige Gleichverteilung von Gebieten mit Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} > 0$ und Konvergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} < 0$ angenommen, so kompensieren sich die Gebiete mit Tropfenanhäufung und diejenigen mit einer Verminderung der Konzentration nicht auf die gleiche Weise. Vielmehr überwiegen wegen der nichtlinearen Natur des Kollisionsprozesses in Form der zugehörigen stochastischen kinetischen Gleichung die Bereiche mit einer Verstärkung der Konzentration. Die Inhomogenität verstärkt sich mit der Zeit noch, was die Verbreiterung des Tropfenspektrums erheblich beschleunigt. Beispielsweise werden im vorliegenden Fall $350 \mu\text{m}$ große Tropfen bereits nach 15 min beobachtet. Bei vollkommen homogener Konzentration würden die größten Tropfen zu diesem Zeitpunkt gerade einmal $1/4$ bis $1/3$ dieses Wertes erreichen.

Bei Kenntnis der Bewegungsgleichung läßt sich ohne größere Schwierigkeiten ein einfaches Programm erstellen, das die Tropfenbahnen bei einer vorgegebenen Strömungskonfiguration berechnet und anschließend graphisch darstellt. Abbildung 7 kann als durchaus charakteristisch für die dabei erhaltenen Ergebnisse betrachtet werden. Weitere ähnliche Bilder – mit Variation der Tropfengröße und des Strömungszustandes – findet man in Pinsky und Khain (1996).

Die Theorie besagt, daß träge Tropfen Gebiete mit großer Vorticity verlassen und sich in Gebieten stark deformierter Strömung ansammeln. Ein Blick auf den Ausdruck einer entsprechenden Simulation bestätigt diese Aussage. Es sind Bereiche beobachtbar, die von den Tropfen gemieden werden. Diese Gebiete fallen offensichtlich mit den größeren Turbulenzwirbeln zusammen. An den Flanken dieser Bereiche ist eine Ansammlung der Trajektorien in langgestreckten und demnach stark deformierten Pfaden zu beobachten. Wo eine Drängung der Trajektorien verschiedener Tropfen herrscht, erhöht sich dementsprechend die Wahrscheinlichkeit für Kollisionen der Tropfen miteinander.

Vereinzelt lassen sich geschlossene Gebiete beobachten, die von einem Wirbel umströmt werden. Voraussetzung für deren Existenz ist eine aufwärts gerichtete, die entgegengesetzte Fallgeschwindigkeit der Tropfen kompensierende Strömung. Für trägheitsbehaftete Tropfen ist ein solcher Zustand allerdings nicht dauerhaft stabil.

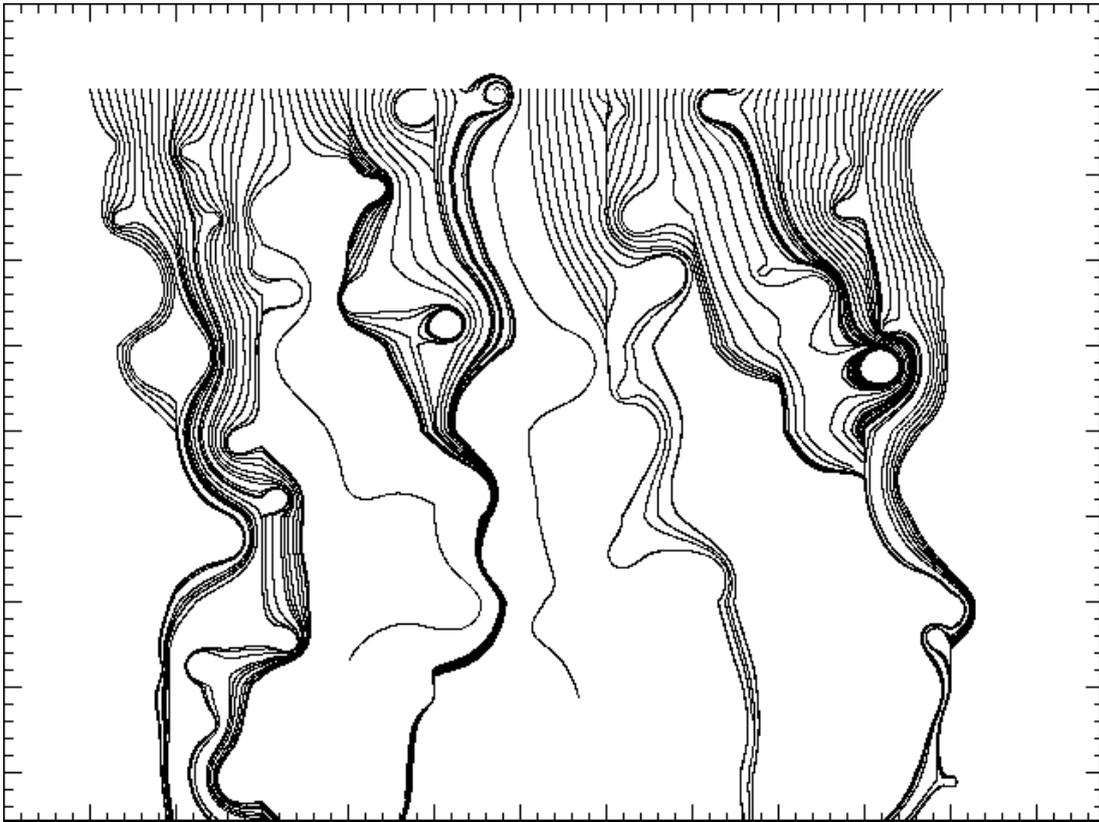


Abbildung 7: Simulation der Trajektorien von 100 Tropfen mit Radius $100 \mu\text{m}$, in 5 m Abstand freigesetzt (Erläuterungen im Text)

6 Stabilitätsanalyse der Tropfenbewegung

Es folgt nun ein den analytischen Betrachtungen von Pinsky und Khain (1995a, 1997) entnommener Abschnitt, in dem im Gegensatz zur bisherigen Untersuchung der Bewegung individueller Tropfen in der sie umgebenden Luft die Vorgänge nun von einem mehr feldbezogenen Standpunkt aus betrachtet werden. Ein solcher Ansatz erlaubt die Darstellung der Tropfenbewegung in Form eines dynamischen Systems gekoppelter Differentialgleichungen. Als Lösungen erhält man zum einen bereits durch die vorhergehenden Abschnitten bekannte Resultate, was die Anwendbarkeit dieser Betrachtungsweise der Tropfenbewegung rechtfertigt. Darüberhinaus lassen sich aber auch weitergehende Aussagen hinsichtlich der Stabilität der erhaltenen Lösungen ableiten. Diese Methoden werden wieder auf eine aus periodisch aneinandergereihten Wirbelzellen aufgebauten Strömung angewandt, wobei die Effekte sowohl mit als auch ohne eine zusätzlich auftretende vertikale Scherung behandelt werden. Es stellt sich heraus, daß die Tropfen unter bestimmten Umständen zu Schwingungen in der Horizontalen angeregt werden, die deshalb gesondert untersucht werden.

6.1 Die Tropfenbewegung als dynamisches System

Die vereinfachten Bewegungsgleichungen (14), (15) der Tropfen lauten

$$\frac{dx}{dt} = U \equiv f_1(x, z, U, W) \quad (50)$$

$$\frac{dz}{dt} = W \equiv f_2(x, z, U, W) \quad (51)$$

$$\tau \frac{dU}{dt} = -U + U_L \equiv f_3(x, z, U, W) \quad (52)$$

$$\tau \frac{dW}{dt} = W_S - W + W_L \equiv f_4(x, z, U, W) \quad (53)$$

U_L und W_L sind die horizontale bzw. die vertikale Komponente der Strömungsgeschwindigkeit der Luft in der Umgebung. Dies ist die exakte Form bei Annahme von Stokes'scher Reibung. Allerdings können durch die Parametrisierung von W_S auch Effekte berücksichtigt werden, die über den Stokes'schen Ansatz hinausgehen.

Die charakteristische Gleichung des Systems aus den vier Differentialgleichungen lautet

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - s \delta_{ik} \right) = 0 \quad (54)$$

mit den Phasenkoordinaten $x_1 = x$, $x_2 = z$, $x_3 = U$ und $x_4 = W$.

Die partiellen Ableitungen der auftretenden Geschwindigkeiten werden mit $\alpha_{xx} = \partial U_L / \partial x$, $\alpha_{xz} = \partial W_L / \partial x$, $\alpha_{zx} = \partial U / \partial z$ und $\alpha_{zz} = \partial W / \partial z$ abgekürzt. Damit lautet die Kontinuitätsgleichung $\alpha_{xx} + \alpha_{zz} = 0$ und für die charakteristische Gleichung folgt

$$\left(\tau s^2 + s \right)^2 + \beta = 0 \quad (55)$$

mit $\beta = \alpha_{xx} \alpha_{zz} - \alpha_{xz} \alpha_{zx}$. Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Gleichgewichts ist das Verschwinden der rechten Seiten der vier Differentialgleichungen $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$. Gleichbedeutend damit ist $U = U_L = 0$, $W = 0$ und $W_L = -W_S$. Diese Gleichgewichtspunkte werden durch die Fluktuation mit der größten Amplitude, also durch den größten turbulenten Wirbel bestimmt. Falls $\beta < 0$ gilt, also $\gamma := \sqrt{-\beta} > 0$ gilt, läßt sich die charakteristische Gleichung in der Form

$$\tau s^2 + s \pm \gamma = 0 \quad (56)$$

mit den Lösungen

$$s_{1,2,3,4} = \frac{1}{2\tau} \left(-1 \pm \sqrt{1 \pm 4\tau\gamma} \right) \quad (57)$$

schreiben. Für $\gamma < \lambda/4$ sind alle Lösungen reell, drei davon sind negativ und eine positiv. Ist $\gamma > \lambda/4$, dann sind nur zwei Lösungen reell, eine davon positiv und die andere negativ, aber zwei Lösungen komplex-konjugiert. Die positiven Lösungen führen zu Sattelpunkten, beschreiben also ein instabiles Gleichgewicht. Die positiven Lösungen zeigen darüberhinaus, daß Tropfen nicht auf Dauer in den Gebieten, in denen $\beta < 0$ gilt, bleiben. Für kleine Tropfen mit $\lambda \gg 1$ ist die positive Wurzel unabhängig von den Tropfeneigenschaften stets gleich γ .

Im Falle von $\beta > 0$, also $\sqrt{-\beta} = \pm i \gamma$ lautet die charakteristische Gleichung

$$\tau s^2 + s \pm i \gamma = 0 \quad (58)$$

mit den Lösungen

$$s_{1,2,3,4} = \frac{1}{2\tau} \left(-1 \pm \sqrt{1 \pm 4\tau i \gamma} \right) \quad (59)$$

Der eine Teil der Lösungen

$$s_{1,2} = \frac{1}{2\tau} \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 16\tau^2 \gamma^2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16\tau^2 \gamma^2}} \right) \quad (60)$$

besitzt einen großen negativen Realteil und klingt damit rasch ab. Die übrigen Lösungen

$$s_{3,4} = \frac{1}{2\tau} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 16\tau^2 \gamma^2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16\tau^2 \gamma^2}} \right) \quad (61)$$

haben positive Realteile und ergeben spiralförmige Tropfenbahnen um instabile Brennpunkte. Beim Eintreten in Gebiete mit $\beta < 0$ setzen die Tropfen ihre ursprüngliche Bewegung unter Bevorzugung einer Richtung fort, wohingegen Gebiete mit $\beta > 0$ von den Tropfen gemieden werden.

Für kleine Tropfen mit $\gamma \tau \ll 1$ gilt vereinfacht

$$s_{3,4} \approx \tau \gamma^2 \pm i \gamma = \tau \beta \pm i \gamma \quad (62)$$

Die Bedingung $\gamma \tau \ll 1$ ist zum Beispiel für 10 μm große Tropfen mit $\gamma = \sqrt{-\beta} \approx 10\text{--}25 \text{ s}^{-1}$, aber $\tau = W_S/\gamma = 10^{-3} \text{ s}$ hinreichend gut erfüllt. Die Periodendauer, also die Zeitdauer für einen spiralförmigen Umlauf, wird durch den Imaginärteil dieser Lösung, also durch γ bestimmt und ist damit nur von Strömungsparametern abhängig. Die dazu benötigte Zeit, ein Gebiet mit $\beta > 0$ zu verlassen, ist hingegen durch den Realteil $\tau \gamma^2$ gegeben. Für sehr kleine, praktisch trägheitslose Tropfen mit $\tau \rightarrow 0$ wird deshalb die zum Verlassen des Wirbels benötigte Zeit unendlich groß. Für sehr große Tropfen mit Radien von zum Beispiel über 300 μm sind wegen $W_S > W$ überhaupt keine Gleichgewichtspunkte mehr vorhanden. Für kleine Tropfen unter einigen 10 μm besteht die Ansammlung der

Trajektorien so lange, bis die Lebensdauer der dazugehörigen Wirbel zu Ende geht. Teilchen dieser Größe sind also für größerskalige turbulente Strukturen nur schwer einsammelbar.

Die Skala, innerhalb derer die Zunahme der Tropfenkonzentration zu erwarten ist, hängt von der Trägheit der Tropfen ab. Der Einfluß der Dissipation ist nur bedeutend bei Skalen oberhalb des Bereiches von Zentimetern. In allen darunterliegenden Skalen wird eine effektivere Dissipation durch die Viskosität unterdrückt. In gewöhnlichen Wolken findet man ungefähr 100 Tropfen/cm³. In Skalen über 1 cm erscheint die Tropfenkonzentration deshalb annähernd kontinuierlich, und Operationen wie die Divergenz oder die Rotation, welche Kontinuität voraussetzen, sind anwendbar.

In einer feldbezogenen Betrachtungsweise lautet die Bewegungsgleichung (13) des Tropfens in Tensorform bei Verwendung der Einsteinschen Summationskonvention

$$\tau \frac{dV_i}{dt} = \tau \frac{\partial V_i}{\partial t} + \tau V_j \frac{\partial V_i}{\partial r_j} = -V_i + V_{L,i} + W_S \delta_{i2} \quad (63)$$

mit den Variablen $r_1 = x$ und $r_2 = z$. In derselben Koordinatenschreibweise gilt für die Divergenz $D = \partial V_i / \partial r_i$. Obwohl die Divergenz des Strömungsgeschwindigkeitsfelds verschwindet, ist für die Divergenz der Tropfengeschwindigkeit $D \neq 0$ möglich. Für kleine Tropfen, die der divergenzfreien Luftströmung folgen, ist D aber klein. Gleiches gilt für große Tropfen, deren annähernd geradlinige Bewegung durch die kleinräumigen Beschleunigungen unbeeinflusst bleibt. Im Bereich dazwischen, genauer bei Tropfengrößen von ungefähr 100 μm , existiert dann ein Divergenzmaximum.

Im stationären Fall $\partial V_i / \partial t = 0$ wird $\psi_{ij} := \partial V_i / \partial r_j$ gesetzt. Die Ortsableitungen $\partial / \partial r_i$ werden dann mit der Kontinuitätsgleichung $\partial V_{L,i} / \partial r_i = 0$ der Luftströmung auf folgende Weise verknüpft

$$\tau V_j \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial r_j} + (1 + \tau D) \psi_{ij} = \frac{\partial V_{L,i}}{\partial r_j} \quad (64)$$

Wird bei Stationarität entlang der Tropfenbahnen integriert, so sind die advektiven Terme identisch mit der vollen Zeitableitung

$$\tau \frac{dD}{dt} + D = -\tau \psi_{ij} \psi_{ji} \quad (65)$$

Zusammen mit der obigen Gleichung ergibt sich schließlich

$$\tau \frac{d\psi_{ij}}{dt} + (1 + \tau D) \psi_{ij} = \frac{\partial V_{L,i}}{\partial r_j} \quad (66)$$

Für kleine Tropfen unter 10 μm gilt neben der Abschätzung $\tau d\psi_{ij}/dt \approx 0$ auch noch $\tau D \ll 1$, weil $\tau \rightarrow 0$ verbunden ist mit $D \rightarrow 0$. Dies führt zu einer Gleichung für die Divergenz der Tropfengeschwindigkeit kleiner Tropfen

$$D = -\tau \frac{\partial V_{L,i}}{\partial r_j} \frac{\partial V_{L,j}}{\partial r_i} \quad (67)$$

Als weitere Vereinfachung erhält man letztendlich $D = 2\tau\beta$. Die Größe $\tau\beta$ ist aber, wie oben gesehen, auch bestimmend für die Zeit, innerhalb derer die Tropfen ein bestimmtes Gebiet verlassen. Dies ist ein Indiz dafür, daß es sich hierbei nur um eine andere Beschreibung desselben Effektes handelt.

6.2 Gescherte und periodisch fluktuierende Strömung

Betrachtet wird nun eine horizontale Strömung mit vertikaler Scherung

$$U_L = \langle U_L(z) \rangle + U'_L \quad (68)$$

Die lineare Scherung mit dem Parameter α wird in der mittleren Strömungsgeschwindigkeit

$$\langle U_L(z) \rangle = U_L(0) + \alpha z \quad (69)$$

spezifiziert. Es werden periodische Fluktuationen der Form

$$U'_L = U_m \sin [k (x - \langle U_L(z) \rangle t)] \quad (70)$$

mit Wellenzahlen $k = 2\pi/\lambda$ betrachtet, die in die mittlere Strömung eingebettet sind. Es werden hier keine vertikalen Geschwindigkeitsfluktuationen zugelassen, so daß wahrscheinlich von einer Unterschätzung der Turbulenzeffekte auszugehen ist. Die Kontinuitätsgleichung wird durch die horizontalen Pulsationen ohne vertikalen Ausgleich nicht verletzt; ein rein horizontaler Ausgleich ist durchaus denkbar.

Zur Beschreibung der Tropfenbewegung in der Phasenebene werden die Phasenkoordinaten $x' = x - \langle U_L(z) \rangle t$ und $u' = U - \langle U_L(z) \rangle$ eingeführt, welche die Bewegung des Tropfens relativ zur Grundströmung beschreiben. Haben Tropfen und Strömung dieselbe Geschwindigkeit, so folgt $x' = const.$ Entsprechend bedeutet $x' < 0$ ein Zurückbleiben des Tropfen gegenüber der Strömung und $x' > 0$ eine relative Vorwärtsbewegung des Tropfens. Für die Phasenkoordinaten gelten dann die Bewegungsgleichungen (14), (15) in der Form

$$\tau \frac{du'}{dt} = -u' - \tau \alpha W_S + U_m \sin(k x') \quad (71)$$

$$\frac{dx'}{dt} = u' - \alpha W_S t = u' - \alpha z \quad (72)$$

Dabei ist $z = W_S t$ die im freien Fall zurückgelegte Wegstrecke.

6.2.1 Scherungsfreie Strömung

Zunächst werden die Bewegungsgleichungen (71), (72) ohne Scherung betrachtet:

$$\tau \frac{du'}{dt} = -u' + U_m \sin(kx') \equiv f_1(u', x') \quad (73)$$

$$\frac{dx'}{dt} = u' \equiv f_2(u', x') \quad (74)$$

Es wird nun eine Stabilitätsanalyse des Systems der beiden gekoppelten Differentialgleichungen durchgeführt. Nach der Theorie von Liapunov bestimmt die Existenz bzw. das Nichtvorhandensein von singulären Punkten, also von Punkten, die möglichen Gleichgewichtszuständen entsprechen, den Charakter der Phasentrajektorien und damit hier den Charakter der Tropfenbewegung. Ein notwendiges Kriterium für die Existenz von singulären Punkten ist das gleichzeitige Verschwinden von du'/dt und dx'/dt , also $f_1(u', x') = 0$ und $f_2(u', x') = 0$. Man erhält dann zwei Serien von singulären Punkten, die zu verschiedenen Ergebnissen führen

- $u' = 0$ und $kx' = 2\pi m$
- $u' = 0$ und $kx' = (2m + 1)\pi$

Dabei kann m die Werte $0, \pm 1, \dots$ annehmen. Die charakteristische Gleichung des Systems aus den beiden Differentialgleichungen ergibt sich bei verschwindender Determinante

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - s \delta_{ik} \right) = 0 \quad (75)$$

Den Variablen x_k werden die Werte $x_1 = u'$ und $x_2 = x'$ zugeordnet. Mit δ_{ik} wird wie üblich das Kronecker-Delta bezeichnet. In den singulären Punkten erhält man so die charakteristische Gleichung

$$\tau s^2 + s \pm k U_m = 0 \quad (76)$$

Das Pluszeichen gilt für die erste Serie singulärer Punkte, das Minus entsprechend für die zweite.

Die quadratische Gleichung besitzt im Falle der ersten Serie die Lösungen

$$s_{1,2} = \frac{1}{2\tau} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\tau k U_m} \right) \quad (77)$$

Beide Lösungen haben einen negativen Realteil. Dies bedeutet, daß in den zugehörigen singulären Punkten ein stabiles Gleichgewicht herrscht. Eine zusätzliche Unterscheidung hinsichtlich der Eigenschaften der Lösung erlaubt die Diskriminante. Für $4\tau k U_m \leq 1$ handelt es sich bei den singulären Punkten um

stabile Knotenpunkte. Gleichbedeutend mit der obigen Bedingung ist eine Begrenzung der Fallgeschwindigkeit $W_s \leq g/4kU_m$ zu größeren Werten hin. Daraus folgt direkt ein maximaler Radius der Tropfen, der die Existenz stabiler Knotenpunkten gerade noch zuläßt. Als Beispiel liefern die Annahmen $L = 50$ m und $U_m = 3$ m/s für die höchste erlaubte Fallgeschwindigkeit $W_s \leq 6,5$ m/s und damit eine Beschränkung des Radius auf $r \leq 1000$ μm . Falls $4\tau kU_m > 1$ gilt, stellen die singulären Punkte stabile Brennpunkte im Phasenraum der Tropfenbewegung dar (Abbildung 8).

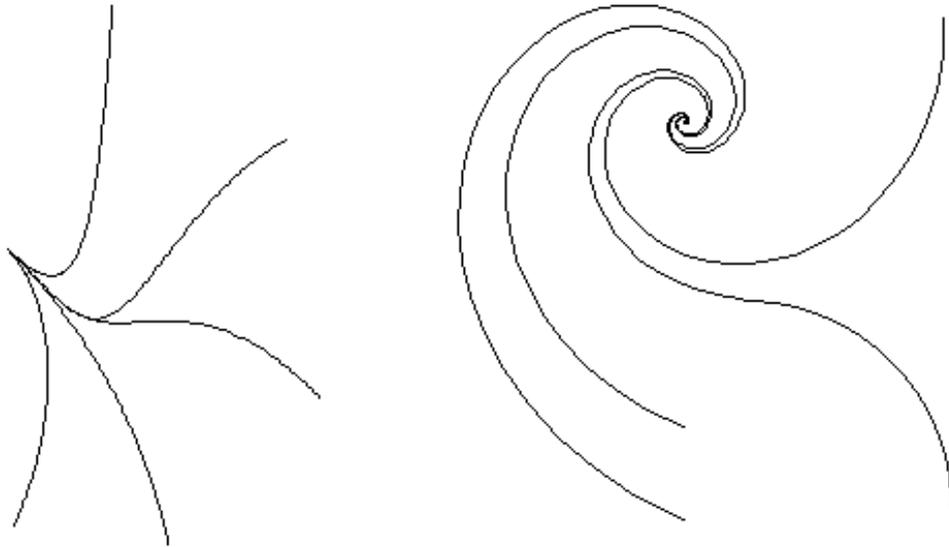


Abbildung 8: Stabiler Knotenpunkt für kleinere Tropfen (links), stabiler Brennpunkt für größere Tropfen (rechts) [Pinsky und Khain (1995a)]

Wenn ein stabiler Punkt erreicht wird, dann bewegt sich der Tropfen fortan mit dem stabilen Punkt im Strömungsfeld mit, so daß die relative horizontale Tropfengeschwindigkeit verschwindet. Das Auftreten von stabilen Punkte geht mit einer Erhöhung der Tropfenkonzentration in bestimmten Bereichen der Wolke einher. Der Abstand dieser Punkte voneinander hängt von der „Wellenlänge“ der Fluktuationen ab. In Verbindung zu den singulären Punkten wird für die Tropfentrajektorien eine Ansammlung entlang bestimmter Bahnen, den sogenannten *isolierten Pfaden*, beobachtet.

Die zweite Serie führt zu den Lösungen

$$s_{1,2} = \frac{1}{2\tau} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\tau kU_m} \right) \quad (78)$$

Eine dieser Lösungen besitzt einen positiven und die andere einen negativen Realteil, so daß das Gleichgewicht in den singulären Punkten instabil ist. Es handelt sich demnach um instabile Sattelpunkte.

Die charakteristische Zeitdauer, bis ein stabiler Punkt erreicht wird, kann mit 10–15 Sekunden sehr bedeutend sein und damit erheblich über der Anpassungszeit gegenüber der Strömung ohne Fluktuationen liegen. Bei Vernachlässigung der Geschwindigkeitsfluktuationen wird diese Relaxationszeit vornehmlich durch λ^{-1} bestimmt, wohingegen die hier betrachtete Zeitdauer für das Erreichen eines Gleichgewichts durch die Wurzel aus der charakteristischen Gleichung, nämlich dem Minimum aus dem Absolutwert des Realteils, das unter Umständen wesentlich kleiner als λ ist, gebildet wird.

6.2.2 Scherungsbehaftete Strömung

Die singulären Punkte werden jetzt durch die Scherungsgleichungen (71), (72)

$$u' = \alpha z \quad (79)$$

$$\sin(kx') = \alpha \frac{\tau W_S + z}{U_m} \quad (80)$$

bestimmt. Die singulären Punkte bewegen sich in der Phasenebene, wobei der Charakter dieser Bewegung von der Fallstrecke z und damit über die Beziehung $z = W_S t$ auch von der dafür benötigten Zeit t abhängt. An den singulären Stellen lautet die charakteristische Gleichung nun

$$\tau s^2 + s \pm k U_m \sqrt{1 - \alpha^2 \frac{(\tau W_S + z)^2}{U_m^2}} = 0 \quad (81)$$

Deren Lösungen spalten sich wieder in zwei Serien auf

- $kx' = \arcsin\left(\alpha \frac{\tau W_S + z}{U_m}\right) + 2\pi m$
- $kx' = -\arcsin\left(\alpha \frac{\tau W_S + z}{U_m}\right) + (2m + 1)\pi$

Dabei ist ebenfalls $m = 0, \pm 1, \dots$ erlaubt. Die erste Serie mit dem Pluszeichen vor dem Arkussinus hat die Wurzeln

$$s_{1,2} = \frac{1}{2\tau} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\tau k U_m \sqrt{1 - \alpha^2 \frac{(\tau W_S + z)^2}{U_m^2}}} \right) \quad (82)$$

Eine genauere Untersuchung der Lösungen mithilfe der Diskriminante ergibt, daß für $z < (U_m/\alpha) - \tau W_S$ beide Realteile negativ sind. Die singulären Punkte stellen dann metastabile Gleichgewichtszustände dar. Metastabil bedeutet hier, daß die Punkte im Phasenraum verschoben werden, wenn die Tropfen sich im Ortsraum fortbewegen. Unter der zusätzlichen Bedingung

$$4 \tau k U_m \sqrt{1 - \alpha^2 \frac{(\tau W_S + z)^2}{U_m^2}} \leq 1 \quad (83)$$

handelt es sich um einen metastabilen Knotenpunkt. Gilt hingegen

$$4 \tau k U_m \sqrt{1 - \alpha^2 \frac{(\tau W_S + z)^2}{U_m^2}} > 1, \quad (84)$$

so liegt der Fall eines metastabilen Brennpunktes vor. Mit wachsendem z bzw. t geht schließlich jeder Brennpunkt in einen Knotenpunkt über. Die metastabilen Punkte werden nämlich mit fortdauernder Fallzeit instabil, und im Bereich verstärkter Tropfenkonzentration setzen Oszillationen der Tropfengeschwindigkeit ein. Sobald die Oszillationsphase eintritt, wächst die Amplitude der horizontalen Geschwindigkeitsabweichung von der Strömung mit zunehmender Fallstrecke, bis sie denselben Wert wie die Amplitude der Strömungsgeschwindigkeitsfluktuation erreicht hat.

Die andere Serie von Lösungen mit dem Minuszeichen vor dem Arkussinus führt zu

$$s_{1,2} = \frac{1}{2\tau} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\tau k U_m \sqrt{1 - \alpha^2 \frac{(\tau W_S + z)^2}{U_m^2}}} \right) \quad (85)$$

Gilt $z < (U_m/\alpha) - \tau W_S$, hat in diesem Fall eine Wurzel einen positiven Realteil, was zu einem instabilen Sattelpunkt führt. Für hinreichend große Fallstrecken $z > (U_m/\alpha) - \tau W_S$ existieren überhaupt keine reellen Wurzeln und damit auch keine singulären Punkte mehr. Bei $z = z_c = (U_m/\alpha) - \tau W_S$ tritt nämlich ein qualitativer Wandel des Charakters der Tropfenbewegung ein, eine Sattel-Knoten-Bifurkation, die zu Oszillationen der Tropfengeschwindigkeit und damit auch der Tropfentrajektorien führt. Bei $z < (U_m/\alpha) - \tau W_S$ existiert dagegen immer ein metastabiler Zustand. Während für $z < z_c$ eine Bewegung der Tropfen mit der Strömung erfolgt, so bilden sich für $z \geq z_c$ Oszillationen gegen die Strömung aus. Für große Tropfen mit $W_S \geq U_m/\tau\alpha$ kann der Fall $z_c \leq 0$ eintreten, was bedeutet, daß große Tropfen sofort zu oszillieren beginnen. In den folgenden Betrachtungen wird $z > z_c$ vorausgesetzt, es soll also keine Stabilität mehr bestehen können.

6.2.3 Tropfenschwingungen in Scherungsschichten

Es wird die Pulsationskomponente des Tropfens relativ zur Luftgeschwindigkeit definiert

$$u'' = U - U_L - U_{sr} = U - U_L + \tau \alpha W_S \quad (86)$$

Damit gilt $\langle u'' \rangle_z = \langle u' \rangle_t = 0$. Die zur Luft relative Tropfengeschwindigkeit bei $U_m = 0$, also ohne Fluktuationen, wird gemäß (29) mit $U_{sr} = -\tau \alpha W_S$ bezeichnet. Unter Verwendung von $z = W_S t$ lauten die Bewegungsgleichungen (71), (72) dann

$$\tau \frac{du''}{dz} = -\frac{u''}{W_S} - \tau U_m \frac{d \sin(k x')}{dz} \quad (87)$$

$$\frac{dx'}{dz} = \frac{u''}{W_S} - \alpha \left(\tau + \frac{z}{W_S} \right) + \frac{U_m}{W_S} \sin(k x') \quad (88)$$

Die Eliminierung von dz führt zu

$$\tau \frac{du''}{dx'} = -\frac{1}{u'' - \alpha(z + \tau W_S) + U_m \sin(k x')} u'' - \tau k U_m \cos(k x') \quad (89)$$

Bei anwachsender Fallstrecke z wird diese zunächst nichtlineare Gleichung ziemlich schnell linear.

$$\tau \frac{du''}{dx'} - \frac{1}{\alpha(z + \tau W_S)} u'' = -\tau k U_m \cos(k x') \quad (90)$$

Beim beobachteten Effekt handelt es sich um Oszillationen mit langsam anwachsender Amplitude und gleichzeitiger Phasenänderung. Als Lösungsansatz bietet sich also an

$$u''(z, x) = A(z) \sin(k x') + B(z) \cos(k x') \quad (91)$$

Die Amplitudenfunktionen $A(z)$ und $B(z)$ verändern sich viel langsamer als die harmonischen Terme mit $\sin(k x')$ und $\cos(k x')$. Setzt man den Ansatz in die Differentialgleichung ein und führt einen Koeffizientenvergleich für die Terme mit Sinus und Kosinus durch, so bekommt man

$$A(z) = -\frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} U_m \quad (92)$$

$$B(z) = \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} U_m \quad (93)$$

mit $\gamma = k \alpha \tau (z + \tau W_S)$. Damit ergibt sich die veränderliche Amplitude der harmonischen Schwingung

$$C(z) = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}} U_m \quad (94)$$

und deren ebenfalls von z abhängige Phasenverschiebung

$$\varphi(z) = \arctan \frac{B}{A} = -\arctan \frac{1}{\gamma} \quad (95)$$

Für sehr große Fallstrecken, also $z \rightarrow \infty$, geht auch $\gamma \rightarrow \infty$ und damit $A \rightarrow -U_m$, $B \rightarrow 0$, $C \rightarrow U_m$ und $\varphi \rightarrow -\pi$. Unabhängig von ihrer Größe hören demnach sämtliche Tropfen irgendwann damit auf, den Fluktuationen der Strömungsgeschwindigkeit zu folgen.

Jetzt werden die Bedingungen am Bifurkationszeitpunkt z_c betrachtet. Aus der Tropfenrtragheit folgt die Stetigkeit und damit die Kontinuität der Trajektorien in einem beliebigen Punkt, so daß $u''(x'_c, z_c) = 0$ gilt. Da die Amplitude bei $z = z_c$ normalerweise nicht verschwindet, $C(z_c) \neq 0$, folgt für das Argument der Schwingung

$$k x'_c = \arctan \frac{1}{\gamma_c} + 2\pi m \quad (96)$$

mit $\gamma_c = \gamma(x_c, z_c) = k\alpha\tau(z_c + \tau W_S)$ und $m = 0, \pm 1, \dots$. Für realistische Werte kann $\gamma_c = kU_m W_S/g \ll 1$ angenommen werden. Gibt man beispielsweise bei $L = 10$ m und $U_m = 3$ m/s den kleinen Wert $\gamma_c = 0,1$ vor, so entspricht dies einer Beschränkung des Tropfenradius auf Werte von $r \leq 70\text{--}100$ μm . Für $\gamma_c \ll 1$ kann aber in guter Näherung $\arctan \gamma_c^{-1} \approx \pi/2 = \text{const.}$ gesetzt werden. Dies bedeutet, daß der Ort, an dem die Oszillationen einsetzen, für kleine Tropfen praktisch unabhängig von deren genauen Größe ist.

Die Amplitude der relativen Tropfengeschwindigkeit zwischen zwei Tropfen der Massen m_i und m_j beträgt

$$\Delta C_{ij} = \sqrt{\Delta A_{ij}^2 + \Delta B_{ij}^2} \quad (97)$$

mit $\Delta A_{ij} = A_i - A_j$ und $\Delta B_{ij} = B_i - B_j$. Dies läßt sich auch als

$$\Delta C_{ij} = \frac{\Delta \gamma_{ij}}{\sqrt{1 + \gamma_i^2} \sqrt{1 + \gamma_j^2}} U_m \quad (98)$$

mit $\Delta \gamma_{ij} = |\gamma_i - \gamma_j|$ schreiben.

Die Tropfen müssen eine bestimmte Fallstrecke durchqueren, bis die Amplitude der Oszillation ihr Maximum erreicht. Für eine kurze Falldistanz treten nur geringe Abweichungen von der zugrundeliegenden Strömung und damit auch nur geringe Abweichungen der Tropfen gegeneinander auf. Bei längerer Fallstrecke erfolgt eine Abkopplung der Tropfenfluktuationen von der Hintergrundströmung, so daß die relativen Abweichungen voneinander wieder abnehmen. Deswegen muß ein Zwischenwert existieren, bei dem die beiden Tropfenbahnen am stärksten voneinander abweichen.

Die Stärke der durch die zusätzliche Relativgeschwindigkeit verursachten Effekte läßt sich über das Verhältnis aus der Differenz der turbulenten Geschwindigkeitsfluktuation und der Differenz der Fallgeschwindigkeiten ausdrücken

$$R_{ij} = \frac{\Delta C_{ij}}{\Delta W_{S,ij}} \quad (99)$$

Dabei ist $\Delta W_{S,ij} = W_{S,i} - W_{S,j}$. Für zwei identische Tropfen mit $m_j \rightarrow m_i$ sollte eigentlich $\Delta W_{S,ij} \rightarrow 0$ gehen, eine genauere Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von R_{ij} führt aber zu dem endlichen Grenzwert

$$R_{ij} \rightarrow R_{ii} = \frac{\frac{k \alpha z U_m}{g}}{1 + \left(\frac{k \alpha z W_{S,i}}{g}\right)^2} \quad (100)$$

für große Fallstrecken $z \gg W_S^2/g$. R_{ii} strebt nach größerer Fallstrecke der Tropfen seinem Maximum entgegen und weist dabei für kleinere Tropfen die größten Werte auf. Eine Erklärung dafür ist die mit der zunehmender Masse gleichermaßen anwachsende Trägheit. Weil für kleinere Tropfen die Differenz der Fallgeschwindigkeiten $\Delta W_{S,ij}$ ebenfalls klein ist, gilt diese Größenabhängigkeit auch für R_{ij} .

Im allgemeinen ist die Bewegung von Tropfen in einer gescherter Strömung mit darin eingebetteten Geschwindigkeitsfluktuationen weder regulär, noch stationär, und darüberhinaus abhängig von den Tropfenparametern wie zum Beispiel der Masse. Selbst bei der einfachen Annahme linearer Scherung und sinusförmiger Geschwindigkeitsfluktuationen erweist sich der Charakter der Tropfenbewegung bereits als demjenigen einer völlig stochastischen Bewegung ähnlich. Dies ist den Bifurkationen zu verdanken, die zu den vielfältigen Oszillationen der Tropfentrajektorien Anlaß geben. Die Frequenz dieser Oszillationen wächst mit der Zeit an, was zu einem Breitbandfrequenzspektrum führt. Der genaue Charakter der Tropfenbewegung hängt wesentlich vom Ort, an dem der Tropfen gebildet wird, ab. Die Geschwindigkeitsoszillationen erhöhen die Relativgeschwindigkeit zwischen den Tropfen, was mit einer verstärkten Koaleszenz einhergeht. Dadurch, daß die Tropfen in derselben Zeit bedingt durch die Fluktuationen einen größeren Volumenbereich überdecken, erhöht sich die Zahl der Kollisionen pro Zeiteinheit, und die Koaleszenzrate wächst an.

7 Zusammenfassung

Die Koaleszenzrate wird gewöhnlich – im laminaren Fall – als proportional zur Anzahldichte der Kollektortropfen und der einzufangenden Tropfen sowie zur Relativgeschwindigkeit, mit der sich das Tropfenpaar aufeinander zu bewegt, angenommen. In erster Näherung wird die Relativgeschwindigkeit zweier Tropfen der Differenz ihrer Fallgeschwindigkeiten gleichgesetzt. Inwiefern diese Annahmen auf den Fall turbulenter Strömung übertragbar sind, wird in dieser Arbeit schlaglichtartig anhand der Auswirkungen der Trägheit der Tropfen auf deren

räumliche Verteilung sowie auf entstehende Geschwindigkeitsdifferenzen und eine damit verbundene Zunahme des kollisionsfördernden „Überlappungsbereiches“ der Tropfentrajektorien untersucht.

Die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Tropfen als Differenz ihrer (konstanten) Fallgeschwindigkeiten anzunehmen, erweist sich auch im turbulenten Fall als gerechtfertigt. Weder bei einer Strömung mit Scherung noch bei periodischen Fluktuationen sind im Bereich relevanter Tropfengrößen bedeutende zusätzliche horizontale Geschwindigkeitsdifferenzen zu erwarten. *Hingegen bewirkt die Turbulenz in Verbindung mit der Partikelträgheit eine Inhomogenisierung der räumlichen Verteilung der Tropfen.* Bereiche der Strömung mit vorherrschenden Trägheitskräften werden von den Tropfen gemieden; an den Flanken dieser Bereiche erfolgt eine Ansammlung der Tropfen, so daß dort günstige Voraussetzungen für Stöße zwischen den Tropfen gegeben sind. Gewöhnlicherweise wird angenommen, daß die Turbulenz zu verstärkter Durchmischung und zu einer damit verbundenen Homogenisierung der Konzentration führt. Hier geschieht aber etwas Gegenteiliges: Die Turbulenz ist die Ursache von Inhomogenitäten.

In den zitierten Arbeiten werden die wichtigsten Ergebnisse numerischer Simulationsmodelle vorgestellt, mit deren Hilfe die Autoren zu der Erkenntnis gelangen, daß in der turbulenten Strömung generell eine verstärkte Tropfenkoaleszenz zu beobachten ist, die mit einer Inhomogenisierung der Tropfenkonzentration einhergeht. Die Tropfen bewegen sich in der turbulenten Strömung bedingt durch ihre Trägheit auf diskreten Bahnen, sogenannten „*isolierten Pfaden*“. Gleichzeitig wird ein Anwachsen des von den Tropfenkollektoren durchquerten Volumens und auch des „*effektiven Radius*“ der kleineren Tropfen beobachtet. Vor allem bei den kleineren Tropfen erweisen sich die Turbulenzeffekte den durch die Schwerebeschleunigung verursachten als zumindest ebenbürtig. Daraus resultierend wächst die Koaleszenzrate an, was mit einer Verbreiterung des Tropfengrößenspektrums einhergeht. Diese Effekte, die einen erheblichen Anstieg der Kollisionsrate der Tropfen verursachen können, werden im Hinblick auf eine mögliche Beeinflussung der Stabilität der Strömung untersucht mit dem Ergebnis, daß die Tropfen im turbulenten Feld dahin tendieren, Bereiche verstärkter turbulenter Strömungsvorticity und -krümmung aufgrund ihrer Trägheit zu verlassen. Tropfen, die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt außerhalb dieser Bereiche aufhalten, vermeiden auch zukünftig diese Gebiete. Die analytische Untersuchung zeigt also eine weitgehende Übereinstimmung mit den Resultaten der numerischen Simulationen.

8 Literaturverzeichnis

- Khain, A. P. und Pinsky, M. B. (1995): *Drop Inertia and Its Contribution to Turbulent Coalescence in Convective Clouds. Part I: Drop Fall in the Flow with Random Horizontal Velocity*, J. Atmos. Sci. **52**, 196–206
- Maxey, M. R. und Corrsin, S. (1986): *Gravitational Settling of Aerosol Particles in Randomly Oriented Cellular Flow Fields*, J. Atmos. Sci. **43**, 1112–1134
- Maxey, M. R. (1987): *The Gravitational Settling of Aerosol Particles in Homogeneous Turbulence and Random Flow Fields*, J. Fluid Mech. **174**, 441–465
- Pinsky, M. B. und Khain, A. P. (1995a): *Initiation of Drop Velocity Oscillations During Their Fall in a Vertically Sheared Flow with Embedded Velocity Fluctuation*, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **78**, 169–192
- Pinsky, M. B. und Khain, A. P. (1995b): *A Model of a Homogeneous Isotropic Turbulent Flow and Its Application for the Simulation of Cloud Drop Tracks*, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **81**, 33–55
- Pinsky, M. B. und Khain, A. P. (1996): *Simulations of Drop Fall in a Homogeneous Isotropic Turbulent Flow*, Atmos. Res. **40**, 223–259
- Pinsky, M. B. und Khain, A. P. (1997): *Formation of Inhomogeneity in Drop Concentration Induced by the Inertia of Drops Falling in a Turbulent Flow, and the Influence of the Inhomogeneity on the Drop Spectrum Broadening*, Quart. J. Roy. Meteor. Soc. **123**, 165–186
- Pruppacher, H. R. und Klett, J. D. (1978): *Microphysics of Clouds and Precipitation*, Dordrecht
- Rogers, R. R. und Yau, M. K. (1989): *A Short Course in Cloud Physics*, Oxford
- Squires, K. D. und Eaton, J. K. (1990): *Particle Response and Turbulence Modification in Isotropic Turbulence*, Phys. Fluids **A 2**, 1191–1203
- Squires, K. D. und Eaton, J. K. (1991): *Preferential Concentration of Particles by Turbulence*, Phys. Fluids **A 3**, 1169–1178
- Wang, L. P., Maxey, M. R., Burton, T. D. und Stock, D. E. (1992): *Chaotic Dynamics of Particle Dispersion in Fluids*, Phys. Fluids **A 4**, 1789–1804
- Wang, L. P. und Maxey, M. R. (1993): *Settling Velocity and Concentration Distribution of Heavy Particles in Homogeneous Isotropic Turbulence*, J. Fluid Mech. **256**, 27–68